

## ❖ 结点标数

正六边形被分割为 24 个相等的三角形. 在图 1 中所示的 19 个结点处写上不同的数. 证明: 在划分的 24 个三角形中, 至少有 7 个三角形, 其顶点处的三个数是沿逆时针方向按递增顺序书写的.

**证明** 将连接相邻两结点的线段标上箭头, 其方向是从结点处所写的数较小的一端指向较大的一端. 从每个三角形的中心来看, 如果箭头沿顺时针方向, 就称为顺箭头; 如果箭头沿逆时针方向, 就称为逆箭头.

考虑正六边形边界上的 12 条线段, 它们分别只属于一个三角形, 这 12 个箭头中至少有一个是逆箭头. 否则, 正六边形边界上的 12 个结点处的数, 沿顺时针方向依次将为  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_1$ , 矛盾.

再考虑正六边形内连接相邻两个结点的线段. 这样每条线段属于两个三角形, 而每个三角形含有三条线段, 但其中 12 条在正六边形的边界上, 三角形有 24 个, 所以正六边形内的线段有  $(24 \times 3 - 12) \div 2 = 30$  条. 其中每条线段的箭头是一个三角形的顺箭头和另一个三角形的逆箭头.

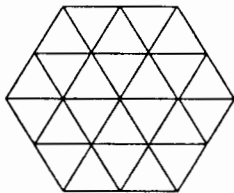


图 1

我们再定义：在顶点处的三个数沿顺时针方向按递增顺序书写的三角形，称为顺三角形；在顶点处的三个数沿逆时针方向按递增顺序书写的三角形，称为逆三角形。

显然，一个顺三角形恰有一个逆箭头，一个逆三角形恰有两个逆箭头，而正六边形内 30 个箭头的每一个都恰是某个三角形的逆箭头。

现在设 24 个三角形中有  $m$  个顺三角形和  $n$  个逆三角形，那么

$$m + n = 24 \quad \text{①}$$

根据上面的分析，整个图中逆箭头数为

$$m + 2n \geq 31 \quad \text{②}$$

由 ② - ① 得  $n \geq 7$ 。