❖银币排列

100 枚银币按质量顺序排成一行. 101 枚金币也按质量顺序排成一行. 已知所有这些硬币质量各不相同. 给定一架天平, 每次允许比较任选的两枚硬币的质量. 试问最少要使用天平多少次, 才能准确判定哪一枚硬币的质量居中(所谓“居中”是指: 若将这 201 枚硬币按质量顺序排成一行, 该枚硬币恰好排在第 101 位)? 请证明你所需要的称量次数确实是最少的.

解法 1　设 m 是任意给定的正整数. 假定有 $m-1$ 枚按质量顺序排列的银币和 m 枚按质量顺序排列的金币, 并且这 $2m-1$ 枚硬币质量不同. 约定以 $f(m)$ 表示按照题目所述用天平在这 $2m-1$ 枚硬币中判定质量居中的一枚所需要的最少称量次数. 又设有 m 枚银币和 m 枚金币满足类似上面所述的条件. 约定以 $F(m)$ 表示在这 $2m$ 枚硬币中用所述的天平判定质量排第 m 位的硬币所需要的最少称量次数. 我们断定这两个函数有以下一些性质(符号 $\max\{A,B\}$ 表示数 A 和数 B 中较大的一个):

(1) $f(1)=0, F(1)=1$;

(2) $f(2k+1)\leqslant\max\{F(k),f(k+1)\}+1$;

(3) $f(2k) \leqslant \max\{F(k), f(k)\} + 1$;

(4) $F(2k+1) \leqslant f(k+1) + 1$;

(5) $F(2k) \leqslant F(k+1)$.

性质(1)是显然的.我们将只给出(2)的证明,因为(3),(4),(5)的证明与之类似.为了证明(2),需要考察符合条件的 $2k$ 枚银币和 $2k+1$ 枚金币.设按由重到轻顺序的金币的排列为 $G_1, G_2, \cdots, G_{2k+1}$;银币的排列为 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k}$.我们的称重策略是:第一次称量比较 G_{k+1} 与 S_k.如果 G_{k+1} 比 S_k 重,则对于 $r \geqslant k$ 也可断定 G_{k+1} 比 S_r 重.同时,G_{k+1} 也比 G_s 重,这里 $S \geqslant k+2$.因此 G_{k+1} 至少比 $2k+1$ 枚其他硬币重.由此得知:对于 $i \leqslant k+1$,所有的 G_i 都不能是质量居中者.同样的道理,对于 $i \leqslant k+1$,可以断定 S_{k+1} 轻于 G_i.对于 $j \leqslant k$,可以断定 S_{k+1} 轻于 S_j.因此 S_{k+1} 至少比 $2k+1$ 枚硬币轻.因此,对于 $j \geqslant k+1$,所有的 S_j 也都不是居中者.这样,我们只需在剩下的 k 枚金币和 k 枚银币中,判定这些硬币中的哪一枚排在这 $2k$ 枚硬币的第 k 位.这需要 $F(k)$ 次称量.因此

$$f(2k+1) \leqslant F(k) + 1$$

如果第一次称量的结果判定 G_{k+1} 比 S_k 轻,那么仿照上面的做法,我们可以去掉 $G_{k+2}, \cdots, G_{2k+1}$ 和 $S_1, S_2, \cdots, S_k$.然后,对剩下的 k 枚银币和 $k+1$ 枚金币进行称量以确定这 $2k+1$ 枚硬币之中质量居中的一枚.为此需要称量 $f(k+1)$ 次.综合两种情形,我们证明了(2):

$$f(2k+1) \leqslant \max\{F(k), f(k+1)\} + 1$$

在(2),(3),(4),(5)的基础上,可推出以下论断:

(6) 对于 $m \geqslant 2$, $F(m) \leqslant n+1$, $f(m) \leqslant n+1$.这里 n 是满足以下条件的正整数:$2^{n-1} < m < 2^n$.

为了证明论断(6),将对 m 进行归纳.对于 $m=2$,显然 $n=1$.并且易见 $F(2)=f(2)=2$.假定对于 $m=2,3,\cdots,2k-1$,论断(6)成立.设 $2^{n-1} < 2k \leqslant 2^n$,则 $2^{n-2} < k \leqslant 2^{n-1}$.根据归纳假设

$$F(k) \leqslant n, f(k) \leqslant n$$

依据(5)可得

$$F(2k) \leqslant F(k) + 1 \leqslant n + 1$$

又依据(3)可得

$$f(2k) \leqslant \max\{F(k), f(k)\} + 1 \leqslant n + 1$$

又设 $2^{n-1} < 2k+1 < 2^n$,则 $2^{n-2} < k+1 \leqslant 2^{n-1}$.根据归纳假设 $f(k+1) \leqslant n$,并设 $F(k) \leqslant n-1$ 或者 $F(k) \leqslant n$.于是根据(4)可得

$$F(2k+1) \leqslant f(k+1) + 1 \leqslant n + 1$$

根据(2)可得

$$f(2k+1) \leqslant \max\{F(k), f(k+1)\} + 1 \leqslant n+1$$

至此,我们完成了论断(6)的证明.

问题所要求证明的是:$f(51) \leqslant 7$. 因为 $2^5 < 51 < 2^6$, 所以由(6)可得 $f(51) \leqslant 7$. 至于具体称量办法,可按照命题(2)证明所提示的办法去做.

下面对所定义的函数作更精细的估算.我们将证明:

(7) 如果 $2^{n-1} < m \leqslant 2^n$,那么 $f(m) = F(m) = n+1$. 因此,f 和 F 都是单调非降函数.对于题目所述的情形,因为 $2^6 < 101 < 2^7$, $f(101) = 7+1 = 8$,所以最少称量次数恰为 8 次.

我们对 m 作归纳,以证明前述论断(7).首先,对于 $m=2$ 情形的论断是显而易见的.假定论断对 2 到 $2k-1$ 的自然数都成立,进而对 $2^{n-1} < 2k \leqslant 2^n$ 情形验证 $f(2k) = n+1$. 对此情形,在前面讨论中已经知道 $f(2k) \leqslant n+1$. 还将对此情形证明 $f(2k) \geqslant n+1$. 我们有 $2k$ 枚金币 $G_1, G_2, \cdots, G_{2k}$ 和 $2k-1$ 枚银币 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k-1}$(都按从重到轻次序编号).很自然地想到,第一次称量选择适当的 i 和 j,将 G_i 与 S_j 作比较.鉴于对称性,不妨设 $i \leqslant k$. 以下对 $i+j \leqslant 2k$ 和 $i+j > 2k$ 这两种情形分别加以讨论.

设 $i+j \leqslant 2k$,不妨设 G_i 重于 S_i,于是 $G_{i+1}, G_{i+2}, \cdots, G_{2k}$ 这 $2k-i$ 枚金币在搜索范围内不能排除.另外,S_{2k-i} 轻于 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k-i-1}$. 因为 $2k-i \geqslant j$,所以 S_{2k-i} 也轻于 $G_1, G_2, \cdots, G_i$. 但是 $S_i, S_2, \cdots, S_{2k-i-1}$ 和 $G_1, G_2, \cdots, G_i$ 共有 $(2k-i-1)+i = 2k-1$ 枚,S_{2k-i} 仍有可能居第 $2k$ 位.因此 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k-i}$ 也在搜索范围之内不能排除.为了在 $G_{i+1}, G_{i+2}, \cdots, G_{2k}$ 和 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k-i}$ 这些硬币中搜寻目标,需要 $F(2k-i)$ 次称量.根据归纳假设 $F(2k-i) \geqslant F(k) = n$,因此 $f(2k) \geqslant n+1$.

设 $i+j > 2k$. 对此情形,在比较 G_i 与 S_j 之后(不妨设 G_i 重于 S_j),尚需在 $G_{2k-j+1}, G_{2k-j+2}, \cdots, G_{2k}$ 和 $S_1, S_2, \cdots, S_{j-1}$ 范围搜寻.考虑到 $j = 2k-i \geqslant k$,我们有

$$f(2k) \geqslant 1 + f(j) \geqslant 1 + f(k) = n+1$$

对于

$$2^{n-1} < 2k \leqslant 2^n$$

上面证明了 $f(2k) \geqslant n+1$. 对于此情形的另一个不等式 $F(2k) \geqslant n+1$ 也可用类似方法证明.为了最后完成论断的证明,还需假设结论对从 2 到 $2k$ 的自然数成立,进而判断结论对 $2k+1$ 也成立.这仍可按照与上面讨论相类似的方法进行.

解法 2 首先针对一个稍有不同的问题叙述一种算法.然后,将说明如何

利用该算法去解决原来提出的问题.最后指出这算法是最优的.

对于给定的正整数 k,设有 k 枚质量各不相同的硬币.如果对某硬币恰存在$\left[\frac{k}{2}\right]$枚比它重的硬币,那么我们就称这枚硬币为“居中者”($[x]$ 表示 x 的整数部分).这定义与题中所述的相容,但更宽地涵盖了 k 为偶数的情形.

设有 2^n 枚质量互不相等的硬币,其中一半是按质量排序的银币,另一半是按质量排序的金币.下面叙述一种算法,说明如何通过 n 次称量(每次比较两枚硬币的质量),确定哪一枚硬币是居中者 M.对于 $n=1$ 情形,恰有两枚硬币,只需一次称量比较.对于 $n>1$ 情形,先取出金币的居中者 G 与银币的居中者 S 予以称量比较,不妨先设金币居中者 G 较重.于是金币的前一半(比 G 重者)的每一枚比所有后半部分银币(S 及比 S 轻者)都重,当然也比所有后半部分金币重.这说明金币前一半的每一枚都至少比 2^{n-1} 枚硬币重,当然比 M 重.同样的讨论可知,银币后一半的每一枚都比多于总数一半的硬币轻,因而轻于 M.鉴于对称性,如果第一次称量判定 S 比 G 重,那么只需将前面论述中的界定词“金”和“银”互换,仍然可以判定某种硬币的一半比 M 轻,另一种硬币的一半比 M 轻.因此,在第一次称量之后,只需在剩下的 2^{n-1} 枚硬币中搜寻居中者 M.所有的条件仍保留有效:这 2^{n-1} 枚硬币中有一半是按质量排序的金币,另一半是按质量排序的银币,居中者就是全体 2^n 枚硬币的居中者 M.我们可以对这 2^{n-1} 枚硬币进行第二次称量,又可仿照前述办法排除一半,剩下 2^{n-2} 枚硬币.如此进行下去,经过 $n-1$ 次称量比较这之后仅剩下的两枚硬币.这情形已在前面提到过.因此,总共需要 n 次称量就能找到 M.

回到原来提出的问题.该问题涉及 100 枚按质量排列的银币和 101 枚按质量排列的金币.我们添加 55 枚虚拟硬币.其中 14 枚质量递增的虚拟银币比 201 枚真实硬币都重;14 枚质量递增的虚拟金币比上述 14 枚虚拟银币还重;又有 14 枚质量递减的虚拟金币比 201 枚真实硬币都轻;最后还有 13 枚质量递减的虚拟银币比前面提到的所有其他硬币都轻.这样,我们总共有 2^8 枚硬币,半数是银币,半数是金币.这里的居中者 M 仍是原有问题中的居中者.因为有 $2^7-14-14=100$ 枚真实硬币比 M 重,有 $(2^7-1)-14-13=100$ 枚真实硬币比 M 轻,因此,我们至多只需进行 8 次称量就可以找到 M.

最后说明前面所述算法是最优的.假定有一种算法只用 7 次允许称量就能从所给的 201 枚硬币中找到居中者 M.我们构造一个关于这算法的“决策树”.决策树的树根表示第一次称量.从树根引出两树枝表示第一次称量结果的两种情形.到了第二次称量之后,上述两树枝又各分出两树枝.如此继续下去.到了第 7 次称量之后,那一层次将分出 2^7 个树枝.至多能作出 128 个最后判断.但是,所述的 201 枚硬币中,每一枚都可以成为居中者 M.仅仅 128 种不同的最后决断

是不够的. 所以 7 次称量不能保证一定找到居中者 M.