❖涂色决胜

某个游戏中，第一个选手在平面上某点标以红色，第二个选手在平面上未着色的点中取 10 点标以绿色. 接下去第一个选手和第二个选手轮流同法对未着色的点标上颜色. 如果有三个红点构成等边三角形，则第一个选手胜. 第二个选手是否总能做到不让第一个选手胜?

解　第一人必胜. 因为在第 n 步后，第一人在一条直线上作了 n 个不同红点，相应第二人作了 $10n$ 个不同绿点. 可是在直线一侧可以有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

个位置，使得这些位置标上红点，则和直线上两点构成一个等边三角形. 因此在直线外可以标 $n(n-1)$ 个红点，使得这些红点中任一点都能使第一人胜.

由于第二人只能标上 $10n$ 个绿点，所以当 $n(n-1) > 10n$ 时第一人必胜. 今 $n(n-1) > 10n$，即 $n(n-11) > 0$. 因此取 $n = 12$，即到第 12 步，则第一人胜. 这证明了断言.