

❖ 巧分奶酪

试将不同质量的 25 块奶酪中的一块切为两块,再将这 26 块奶酪分为两堆,则总能出现下面情形:

- (1) 每堆有 13 块;
- (2) 两堆的质量相同;
- (3) 对切成两块的那块奶酪, 两块分别在不同的堆中.

解 取出最重的那块奶酪, 记作 a_0 , 其余 24 块奶酪分别记作 a_1, a_2, \dots, a_{24} , 且

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{24}$$

问题化为求出非负实数 x, y , 使得

$$x + y = a_0$$

又求出 $1, 2, \dots, 24$ 的排列 i_1, i_2, \dots, i_{24} , 使得

$$ai_1 + \dots + ai_{12} + x = ai_{13} + \dots + ai_{24} + y$$

我们取

$$i_1 = 1, i_2 = 3, \dots, i_{12} = 23, i_{13} = 2, i_{14} = 4, \dots, i_{24} = 24$$

记

$$a = ai_1 + ai_2 + \dots + ai_{12} = a_1 + a_3 + \dots + a_{23}$$

$$b = ai_{13} + ai_{14} + \dots + ai_{24} = a_2 + a_4 + \dots + a_{24}$$

则

$$a - b = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{23} - a_{24}) = c \geq 0$$

所以

$$c = a - b = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{22} - a_{23}) - a_{24} \leq a_1 \leq a_0$$

目的为求 $x \geq 0, y \geq 0$, 有 $a + x = b + y$, 即 $a - b = y - x$ 有

$$0 \leq c = y - x \leq a_1 \leq a_0 = x + y$$

所以

$$y = x + c, a_0 = x + y = 2x + c$$

即

$$x = \frac{a_0 - c}{2} \geq 0, y = \frac{a_0 + c}{2} \geq 0$$

这证明了将奶酪 a_0 切成质量为

$$x = \frac{a_0 - c}{2}$$

的一块, 另一块质量为

$$y = \frac{a_0 + c}{2}$$

则有

$$a + x = b + y$$

即符合条件.