❖实力悬殊

在一次棋类比赛中有 $2n$ 个选手,共进行两轮比赛. 在每轮比赛中,每个选手都要和其他选手比赛一次. 在比赛时,胜记 1 分,平记$\frac{1}{2}$分,输记 0 分. 如果每一个选手第一轮的总分和第二轮的总分之差至少为 n 分,试证:这个差恰好为 n 分.

证明 记第 i 个选手在第一轮比赛中得分a_i,在第二轮比赛中得分 b_i,$1 \leqslant i \leqslant 2n$. 由于同一选手在两轮比赛中分数差为

$$|a_i - b_i| \geqslant n$$

我们将 $2n$ 个选手排队,使得第 $1,\cdots,s$ 个选手在第一轮比赛中总分为 $a_i \leqslant n-1$,在第二轮比赛中总分为 $b_i \geqslant n$. 又第 $s+1,\cdots,2n$ 个选手在第一轮比赛中总分为 $a_i \geqslant n$,在第二轮比赛中总分为 $b_i \leqslant n-1$.

集合 A 由第 $1,\cdots,s$ 个选手构成,集合 B 由第 $s+1,\cdots,2n$ 个选手构成.于是有

$$b_i - a_i \geqslant n, 1 \leqslant i \leqslant s; a_i - b_i \geqslant n, s+1 \leqslant i \leqslant n$$

由于每轮比赛所得总分为

$$\binom{2n}{2} = n(2n-1)$$

因此有

$$a = \sum_{i=1}^{s} a_i, a' = \sum_{i=s+1}^{2n} a_i, b = \sum_{i=1}^{s} b_i, b' = \sum_{i=s+1}^{2n} b_i$$

$$a + a' = b + b' = n(2n-1)$$

注意到对集合 A 而言,其中选手在第二轮比在第一轮所得的总分增加 $b-a$ 分.这些分是由集合 A 中选手实质上胜集合 B 中选手而得到的(这里胜者得 1 分,平局各得 $\frac{1}{2}$ 分,而输者得 0 分).如果集合 A 中选手和集合 B 中选手比赛时总胜,则得分 $s(2n-s)$.所以证明了 $b-a \leqslant s(2n-s)$.同理 $a'-b' \leqslant s(2n-s)$.

另一方面,由

$$b_i - a_i \geqslant n, 1 \leqslant i \leqslant s$$

有

$$b - a \geqslant sn$$

同理

$$a' - b' \geqslant (2n-s)n$$

于是有

$$sn \leqslant b - a \leqslant s(2n-s), (2n-s)n \leqslant a' - b' \leqslant s(2n-s)$$

这证明了

$$sn \leqslant s(2n-s), (2n-s)n \leqslant s(2n-s)$$

即有

$$n \leqslant 2n - s, n \leqslant s$$

至此证明了 $s = n$,所以

$$n^2 \leqslant (b-a) \leqslant n^2, n^2 \leqslant (a'-b') \leqslant n^2$$

这证明了

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = n^2, \sum_{i=n+1}^{2n}(a_i - b_i) = n^2$$

但是

$$b_i - a_i \geqslant n, 1 \leqslant i \leqslant n$$

所以

$$b_i - a_i = n, 1 \leqslant i \leqslant n$$

同理

$$a_i - b_i \geqslant n, n + 1 \leqslant i \leqslant 2n$$

所以

$$a_i - b_i = n$$

总之证明了

$$|a_i - b_i| = n, 1 \leqslant i \leqslant 2n$$