❖完美坐法

有 n 个人，每个人恰好认识 3 个人，他们围着圆桌坐下，如果每个人认识他两旁的人，就称这种坐法为完美的. 证明：如果有一种完美的坐法 S，则必有另一种完美的坐法，它不能由 S 经过旋转或反射得出.

证明　将每个人用点表示，并在认识的人之间连上一条线，得到一个有 n 个点，每点引出 3 条线的“3 正则图”，由于 $3n$ 等于边数乘以 2，所以 n 是偶数 $2k$，而边数是 $3k$.

图中的 k 条边，如果两两不相邻(没有公共端点)，便称为一个 1— 因子，对于“3 正则图”，如果 E 是它的一个 1— 因子，F 也是它的一个 1— 因子，并且 $E \cap F = \varnothing$，那么从图中去掉 E 与 F 的边，剩下的 k 条边也组成一个 1— 因子 F'，F' 与 E 没有公共元(边).

考虑满足 $E \cap F = \varnothing$ 的 1— 因子组(E, F)，其中 E 包括一条固定的边 e，根据上面所说，每个组(E, F) 有一个“伴侣”(E, F)，所以这种 1— 因子组的个数是偶数.

另一方面，$\{(E, F), E \cap F = \varnothing, e \in E\}$ 可以按照 $E \cup F$ 来分类，如果 $E \cup F$ 是一个圈，那么它只产生一个组(E, F)；如果 $E \cup F$ 不是一个圈，由于 $E \cup F$ 中每个点引出两条边，所以它可以分成若干个不相连的圈，每个圈有 2

个 1— 因子,在含 e 的那个圈中,E 的边只有一种取法,在其余的圈中均有 2 种取法,所以共有 2^{t-1} 种(E,F),其中 C 为圈数,总和为

$$\sum_{E\cup F} 2^{c-1} \tag{①}$$

当 $c>1$ 时,2^{c-1} 为偶数;当 $c=1$ 时,2^{c-1} 为奇数.由于总个数为偶数,所以①中应有偶数个 $c=1$,即有史密斯(Smith)定理在“3 正则图”中,通过每条边 e 的圈(Hamilton)有偶数个.

现在,已知过 e 有一个哈密尔顿圈,因而至少还有一个过 e 的哈氏圈.