❖切割三角形

凸的 $2n+1$ 边形的每个顶点涂上三种颜色之一,同时任意两个相邻的顶点不同色.试证:这 $2n+1$ 边形可被不相交的对角线分割为三角形,这些三角形的顶点均涂不同的颜色.

证明 用数字 1,2,3 表示颜色.在所考察的 $2n+1$ 边形中,每条边的端点标记不同的数字.我们用数学归纳法来证明.

对于三角形的情况($n=1$),顶点是用三个不同的数字 1,2,3 标记,并且不能再分割.

假设对任意的 $2n-1$ 边形,其顶点按上述方式标记,我们能用不相交的对角线将它分割成所需的三角形.现考察 $2n+1$ 边形.

引理 如果 $2n+1$ 边形的顶点按上述方式标记,那么总可以找到标记着数字 1,2 和 3 的多边形的三个连续的顶点.

引理的证明 如果不然,在任意的三个连续的顶点,碰不到所有三个数字 1,2 和 3,设它们都标以 1 和 2.根据假设,与它们相邻的顶点只标以 2 和 1.我们就有"四顶点组"的连续顶点 2121.与这"四顶点组"相邻的顶点,根据假设将是标记着 1 和 2,我们便有六个连续的顶点组 121212.如此继续,结果得到 $2n$ 个顶点连续地标记着 1212…12(或者 2121…21),最后第 $2n+1$ 个顶点不得不标记数字 3,使之满足编号的条件.于是我们得到一组三个相邻的顶点,标记 1,2 和 3.这与假设矛盾,引理证毕.

考察多边形中标记以不同数字的三个连续的顶点.设它们的次序是 1,2,3.将其相邻(左边和右边)的顶点并入,无论如何只有四种情况:21231,31231,21232,31232,如图 1.

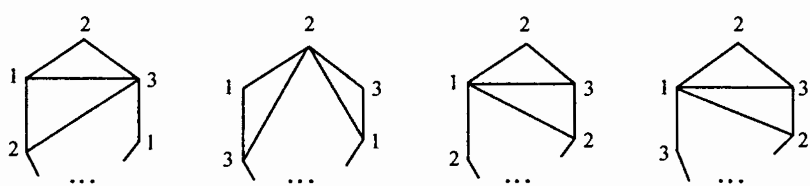

图 1

所有这些情况,都可以将 $2n+1$ 边形用不相交的对角线分割出两个所需的三角形(见图 1),同时,余下的 $2n-1$ 边形将仍然满足题设条件.根据归纳假设,我们可以将其分割成所需的形式.