❖湖滨渡轮

在圆形湖滨上有若干个地点，它们之间某些点有航线联系. 已知对于 A 和 B 两点，当且仅当从沿湖滨向右看分别在它们下面一点的 A' 和 B' 没有航线联系时，它们才有航线联系. 证明：从任意一点都可以乘轮船到另外一点，且换船不超过两次.

证明　设沿湖滨的所有点依次为 $1,2,3,\cdots,n$（在第 n 点的下面是第 1 点）. 根据题设，任意的两个"相邻的相邻点对" $k-1$ 和 k，k 和 $k+1$ 恰有一对，其间有航线，所以相邻点之间有航线和没有航线是相间交替的. 例如，1 和 2，3 和 4，$\cdots$，$2k-1$ 和 $2k$，$\cdots$ 之间是有航线联系的（图 1）. 显然，余下的是证明任意两组点对 $2k-1$ 和 $2k$，$2l-1$ 和 $2l$ 之间存在航线，而这从题设即可得到：或者 $2k-1$ 和 $2l-1$ 之间，或者 $2k$ 和 $2l$ 之间，是有航线的. 若 $2k-1$ 和 $2l-1$ 之间有航线，则从 $2k$ 到 $2l$ 可依次经 $2k-1$ 和 $2l-1$ 换船，其他类推. 命题得证.

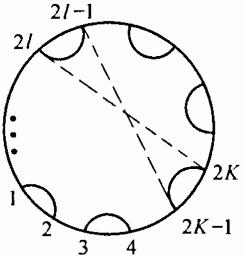

图 1

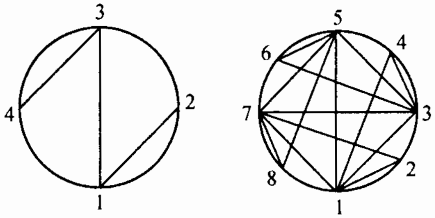

图 2

从我们的推证过程中可以发现，根据题设，湖滨的地点数是有限制的. 首先 n 必须是偶数，进而要求 $n \geqslant 4$. 可以验证 $n=6$ 时，符合题设的航线系统是不存在的. 另一方面，图 2 表示 $n=4$ 和 $n=8$ 的航线系统. 事实上，当 $n=4k$（k 为自然数）时，符合题设的航线系统才存在.