```
    end
    Q = eye(size(A));
    Q(m(1), m(1)) = cos(phi);
    Q(n(1), n(1)) = cos(phi);
    Q(m(1), n(1)) = sin(phi);
    Q(n(1), m(1)) = - sin(phi);
    A = Q' * A * Q;
    P = P * Q;
    if max(max(abs(A - diag(diag(A)))))< tol
      D = diag(A);
      return;
    end
    k = k + 1;
  end
```

例如：

```
C =   4    3    2
      3    4   -1
      2   -1    3
[y, p, k] = jacbieig(C)
y =   7.1464
     -0.3649
      4.2184
p =    0.7401   -0.6305    0.2338
       0.6414    0.5572   -0.5275
       0.2023    0.5404    0.8168
k =     7
```

第五节 线性代数应用举例

一、动物的繁殖问题

1. 问题

某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为 15 岁，将其分成三个年龄组，第一组为 0～5 岁，第二组为 6～10 岁，第三组为 11～15 岁. 动物从第二年龄组起开始繁殖后代，经过长期统计，第二年龄组的动物在其年龄段平均繁殖了 4

个后代,第三年龄组的动物在其年龄段平均繁殖了 3 个后代,第一年龄组和第二年龄组的动物能顺利进入下一年龄组的存活率分别为 1/2 和 1/4.假设农场现有三个年龄段的动物各 1 000 头,问 15 年后农场三个年龄段的动物各有多少头?

2.问题分析与建立模型

由于年龄分组为 5 岁一段,将时间周期也取为 5 年.设 $x_i^{(k)}$ 表示第 k 个时间周期中第 i 组年龄段动物的数量,由于在某一时间周期的第二年龄组和第三年龄组动物的数量是上一时间周期的上一年龄组存活下来的动物数量,故

$$x_2^{(k)}=\frac{1}{2}x_1^{(k-1)},\quad x_3^{(k)}=\frac{1}{4}x_2^{(k-1)}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

又由于该时间周期第一年龄组动物的数量是上一时间周期各年龄组出生的动物数量之和,即

$$x_1^{(k)}=4x_2^{(k-1)}+3x_3^{(k-1)}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

于是有递推关系

$$\begin{cases}x_1^{(k)}=4x_2^{(k-1)}+3x_3^{(k-1)},\\ x_2^{(k)}=\dfrac{1}{2}x_1^{(k-1)},\\ x_3^{(k)}=\dfrac{1}{4}x_2^{(k-1)},\end{cases}$$

即
$$\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4&3\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k-1)}\\x_2^{(k-1)}\\x_3^{(k-1)}\end{bmatrix}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

或
$$\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(k-1)}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&4&3\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{X}^{(0)}=\begin{bmatrix}1\ 000\\1\ 000\\1\ 000\end{bmatrix}.$$

由递推公式知

$$\boldsymbol{X}^{(n)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(n-1)}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}^{(n-2)}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}^{(0)}.$$

15 年后,即经过了 3 个时间周期后,动物的数量为

$$\boldsymbol{X}^{(3)}=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}^{(0)}$$

$$=\begin{bmatrix}0&4&3\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\ 000\\1\ 000\\1\ 000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\ 375\\1\ 375\\875\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^{(3)}\\x_2^{(3)}\\x_3^{(3)}\end{bmatrix},$$

即 15 年后农场饲养的动物总数将达到 16 625 头，其中 0～5 岁的有 14 375 头，占86.47%；6～10 岁的有 1 375 头，占 8.27%；11～15 岁的有 875 头，占 5.226%. 这 15 年间，动物总增长 16 625 - 3 000 = 13 625 头，总增长率为 454.16%.

3. 进一步分析

如果问第 n 个时段各年龄段的动物各有多少头，我们可用公式

$$\boldsymbol{X}^{(n)} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}^{(0)}$$

来计算，当 n 给定，由于 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 已知，只需求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂即可. 在 MATLAB 中用

X = A^n * X0　(X0 即 $\boldsymbol{X}^{(0)}$)

直接求得任意时段动物群的结构，但若讨论一般情况，并讨论 $n\to\infty$ 时动物群的结构，则可作如下分析

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成的对角阵为 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$，其对应的特征向量矩阵为 $\boldsymbol{P}$，即有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中

$$\boldsymbol{D}^n = \mathbf{diag}(d_1^n, d_2^n, d_3^n),$$

本例中

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1.5000 & & \\ & -1.3090 & \\ & & -0.1910 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.9474 & 0.9320 & 0.2259 \\ 0.3158 & -0.3560 & -0.5914 \\ 0.0526 & 0.0680 & 0.7741 \end{bmatrix}.$$

4. 关于年龄分布的人口预测模型

如果我们将人口按相同年限(如 5 年)分成若干年龄组，同时假设各年龄段的男女人口分布相同，这样就可以通过只考虑女性人口来简化模型，人口的发展随时间变化，一个时间周期的幅度使之对应于基本年龄组间距(如 5 年)，令 $x_i^{(k)}$ 是在时间周期 k 时第 i 个年龄组的(女性)人口，$i = 1, 2, \cdots, n$. 用 1 表示最低年龄组，用 n 表示最高年龄组，这意味着不考虑更大年龄组人口的变化. 设 b_i 是第 i 个年龄组在一个周期内的存活率，它可由统计资料求得，则由第 i 个年龄组成员到第 $i+1$ 个年龄组的转移过程可由下述方程描述

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

由上述方程是不能确定 $x_1^{(k)}$ 的，这是因为第一个年龄组成员并不是由其他

年龄组存活转移而来，而是其他所有年龄组成员在上一阶段生育的人口总和. 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个年龄组人口的出生率，它是由每一时间周期内第 i 个年龄组的每一成员的女性后代的人数来决定的，通常也是由统计资料得到，则

$$x_1^{(k)}=a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_nx_n^{(k-1)}$$

用矩阵表示可以写成

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

或简写成

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{(k-1)},$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

称为 Leslie 矩阵，由此可得递推公式

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{(k-1)}=\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{X}^{(k-2)}=\cdots=\boldsymbol{L}^k\boldsymbol{X}^{(0)},$$

这就是 Leslie 模型.

二、环境保护的投入产出模型

随着后工业化社会的发展，环境污染已成为人们面临的三大难题（环境污染、能源短缺、人口膨胀）之一. 然而，环境污染又与人类生产活动密切相关，环境中的污染物（包括各种物理污染物和化学污染物）大都来自人类生产活动，人们在利用各种资源创造大量物质财富的同时，也排出了大量污染物，从而造成了环境污染. 因而应将环境污染问题的研究与人类生产活动联系在一起考虑. 投入产出分析是对人类生产活动和各个部门之间相互联系进行分析的一种方法. 下面介绍列昂季耶夫对环境保护问题的投入产出分析模型.

列昂季耶夫的环境保护投入产出模型的基本结构如表 4－1 所示. 表中除了通常几个生产部门外，增加了几个污染部门.

表 4－1　环境保护的投入产出表

<table>
<tr><td rowspan="3" colspan="2"></td><td colspan="2">中间产品</td><td rowspan="3">最终产品及最终产品领域所产生的污染</td><td rowspan="3">总产品及污染物产生总量</td></tr>
<tr><td>生产部门</td><td>消除污染部门</td></tr>
<tr><td>1　2　…　n</td><td>1　2　…　m</td></tr>
<tr><td rowspan="4">生产部门</td><td>1</td><td>x_{11}　x_{12}　…　x_{1n}</td><td>E_{11}　E_{12}　…　E_{1m}</td><td>y_1</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_{21}　x_{22}　…　x_{2n}</td><td>E_{21}　E_{22}　…　E_{2m}</td><td>y_2</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮　⋮　　⋮</td><td>⋮　⋮　　⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>n</td><td>x_{n1}　x_{n2}　…　x_{nn}</td><td>E_{n1}　E_{n2}　…　E_{nm}</td><td>y_n</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td rowspan="4">污染部门</td><td>1</td><td>P_{11}　P_{12}　…　P_{1n}</td><td>F_{11}　F_{12}　…　F_{1m}</td><td>R_1</td><td>Q_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_{21}　P_{22}　…　P_{2n}</td><td>F_{21}　F_{22}　…　F_{2m}</td><td>R_2</td><td>Q_2</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮　⋮　　⋮</td><td>⋮　⋮　　⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>m</td><td>P_{m1}　P_{m2}　…　P_{mn}</td><td>F_{m1}　F_{m2}　…　F_{mm}</td><td>R_m</td><td>Q_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">固定资产折　旧</td><td>d_1　d_2　…　d_n</td><td>$\bar{d}_1$　$\bar{d}_2$　…　d_m</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">新创造价值</td><td>劳动报酬</td><td>v_1　v_2　…　v_n</td><td>v_1　$\bar{v}_2$　…　$\bar{v}_m$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>社会纯收入</td><td>m_1　m_2　…　m_n</td><td>$\bar{m}_1$　m_2　…　$\bar{m}_m$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">总产品及污染物消除总量</td><td>x_1　x_2　…　x_n</td><td>s_1　s_2　…　s_m</td><td></td><td></td></tr>
</table>

表中各项记号的意义如下

x_i——第 i 个部门产品的总产出；

y_i——第 i 个部门产品的最终产出；

x_{ij}——第 j 个部门生产过程中所消耗的第 i 部门产品的数量；

E_{ij}——第 j 个消除污染部门在消除污染过程中所消耗的第 i 部门产品的数量；

P_{ij}——第 j 个部门生产过程中所产生的第 i 种污染物的数量；

F_{ij}——第 j 个消除污染部门本身所产生的第 i 种污染物的数量；

R_i——最终需求领域所产生的第 i 种污染物数量；

Q_i——第 i 种污染物的总量；

S_j——第 j 个消除污染部门消除污染物的总消除量；

d_j——第 j 个生产部门的固定资产折旧；

$\bar{d}_j$——第 j 个消除污染部门的固定资产折旧；

v_j——第 j 个生产部门的劳动报酬；

$\bar{v}_j$——第 j 个消除污染部门的劳动报酬；

m_j——第 j 个生产部门所创造的社会纯收入；

$\bar{m}_j$——第 j 个消除污染部门所创造的社会纯收入.

从表的水平方向看，有两组平衡方程：一组是产品的生产与消耗的平衡方程；另一组是污染物的形成方程.即

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} E_{ij} + y_i = x_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n), \\ \sum_{j=1}^{n} P_{ij} + \sum_{j=1}^{m} F_{ij} + R_i = Q_i \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

前一式说明，总产品 x_i 除去最终产品 y_i 以外，其余则用作产品生产的消耗和消除污染部门的消耗；后一式说明，污染物 Q_i 来自三个方面，即生产领域、最终需求领域和消除污染部门.

用 a_{ij} 表示生产部门的直接消耗系数.令

$$e_{ij} = \frac{E_{ij}}{S_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,n \\ j = 1,2,\cdots,m \end{pmatrix},$$

$$p_{ij} = \frac{P_{ij}}{x_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{pmatrix},$$

$$f_{ij} = \frac{F_{ij}}{S_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,m \end{pmatrix},$$

则 e_{ij} 表示消除污染部门消除一个单位的第 j 种污染物所消耗的第 i 个部门产品的数量，它称为消除污染部门的直接消耗系数；p_{ij} 表示第 j 个部门单位产品生产过程中所产生的第 i 种污染物的数量，它称为生产部门污染物的产生系数；f_{ij} 表示第 j 个消除污染部门在消除一个单位污染物中所新产生的第 i 种污染物数量，称为消除污染部门污染物的产生系数.于是得到以下系数矩阵：

生产部门直接消耗系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

消除污染部门直接消耗系数矩阵

$$E=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nm} \end{bmatrix}.$$

生产部门污染物产生系数矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}.$$

消除污染部门污染物产生系数矩阵

$$F=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{bmatrix}.$$

并令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,\cdots,S_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)^{\mathrm{T}}$，则两组平衡方程的矩阵表示形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{ES}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}, \\ \boldsymbol{PX}+\boldsymbol{FS}+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}, \end{cases}$$

设 $\alpha_i(0\leqslant\alpha_i\leqslant1)$ 表示第 i 种污染物的消除比例，则

$$S_i=\alpha_i Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

引入对角矩阵

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_m \end{bmatrix},$$

则向量 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 就有关系：$\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{Q}$，将其代入平衡方程，并整理可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ -\boldsymbol{P} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix},$$

解得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ -\boldsymbol{P} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix},$$

它表明，如果已知最终产品 $\boldsymbol{Y}$ 和最终产品领域所产生的污染量 $\boldsymbol{R}$，就可以求出应生产的总产品量 $\boldsymbol{X}$ 和产生的污染物总产量 $\boldsymbol{Q}$. 污染物的残存量为

$$Q_{残}=Q-\hat{\alpha}Q=(I-\hat{\alpha})Q.$$

以上是从表的水平方向上研究得到的结论，再从垂直方向上研究，并以价值单位作为生产部门的计量单位，来研究消除污染的费用及其对产品价格的影响.

1．生产部门费用构成

对于生产部门，在考虑消除污染费用之前的平衡关系是

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}+d_j+v_j+m_j=x_j\qquad(j=1,2,\cdots,n).$$

如果进行消除污染活动，势必要提高产品价格.设 $\pi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 部门产品价格提高率；$\varphi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 表示消除一个单位的第 i 种污染物的费用.这时，新的平衡关系式为

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\pi_i)x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\alpha_iP_{ij}+d_j+v_j+m_j=(1+\pi_j)x_j\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

由以上两组平衡关系式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_ia_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\alpha_iP_{ij}=\pi_j\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

令 $\boldsymbol{\Pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Pi}.$$

2．消除污染部门的费用

第 j 个消除污染部门的费用总额为 φ_jS_j，因而第 j 个消除污染部门的费用之平衡关系为

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\pi_i)E_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\alpha_iF_{ij}+\bar{d}_j+\bar{v}_j+\bar{m}_j=\varphi_jS_j\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

两边同除以 S_j，并令

$$h_j=\sum_{i=1}^{n}e_{ij}+\frac{\bar{d}_j+\bar{v}_j+\bar{m}_j}{S_j}\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_ie_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\alpha_if_{ij}+h_j=\varphi_j\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

用矩阵表示，则有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Phi},$$

式中 $\boldsymbol{H}=(h_1,h_2,\cdots,h_m)^{\mathrm{T}}$.

上述两个结论可以合并得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{H}\end{bmatrix},$$

解得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}.$$

由此可以求出消除一个单位污染物的费用向量 $\boldsymbol{\Phi}$,以及由于消除污染各生产部门价格的上涨率 $\boldsymbol{\Pi}$.

荷兰曾于 1973 年用类似的方法计算出消除污染对各部门产品价格的影响(表 4 - 2).

表 4 - 2　消除污染对各部门产品价格的影响

部门	农业	纺织业	煤矿	化石品	煤油	金属制品及机械制造	建筑业
中期($\boldsymbol{\Pi}$)	0.22	1.00	0.10	0.47	0.11	0.11	0.18
长期($\boldsymbol{\Pi}$)	1.67	6.25	0.06	2.99	1.65	0.97	1.30

由上表可以看出,中期消除污染对各部门产品价格的影响的百分率比长期小,这是由于中期各种污染物的消除比例较长期低.