```
if nargin == 2
   flag = 0;
end
if flag == 0
   y = dotab(v1, v2)/radvec(v1)/radvec(v2);
elseif flag == 1
   y = acos(dotab(v1, v2) /radvec(v1)/radvec(v2));
elseif flag == 2
   y = acos(dotab(v1, v2) /radvec(v1)/radvec(v2)) * 180/pi;
end
```

(6) 两点间的距离　可用下述函数求两点间的距离

```
function y = dist(v1, v2)
y = radvec(v1 - v2);
```

(7) 向量的正交投影　可用下述函数求向量的正交投影

```
function [c, d] = orthprj(a, b)
k = dotab(a, b)/(radvec(b)^2);
c = k * b;
d = a - c;
```

(8) 两向量的向量积　可用下述函数求两向量的向量积

```
function y = cross_product(a, b)
a = reshape(a, 3, 1);
b = reshape(b, 3, 1);
c = eye(3);
y(1) = -det([b, a, c(:, 1)]);
y(2) = -det([b, a, c(:, 2)]);
y(3) = -det([b, a, c(:, 3)]);
```

(9) 向量的混合积　可用下述函数求向量的混合积

```
function y = mixed-product(a, b, c)
y = dotab(cross_product(a, b), c);
```

请同学们自己练习以上 9 个有关向量运算的函数.

第二节　解线性方程组

线性方程组是贯穿于线性代数始终的一个非常重要的内容,也是实际应用中使用非常广泛的内容,因而,学会求解线性方程组是非常必要的.一般情况下,

若有 m 个变量，n 个方程，方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，常数项列向量为 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $n\times 1$ 矩阵，方程组可写为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为 m 个变量构成的列向量，若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$，且 $m=n$，则方程有唯一解，称为恰定方程组；若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$，且 $m<n$，则方程组无解，称为超定方程组；$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<m$ 则方程有无穷多组解，称为欠定方程组．若 $\boldsymbol{b}$ 中元素全为 0，称方程组为齐次线性方程组．

一、齐次线性方程组的求解

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，由线性代数知识知，它至少有一零解，若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<m$，则它有无穷多组解．在 MATLAB 中有一个非常有用的函数 $\boldsymbol{B}=\operatorname{null}(\boldsymbol{A})$，它返回了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的标准正交基组成的矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{XB}=1$，$\boldsymbol{B}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的维数．即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量构成了线性方程组的一组标准正交基础解系．如解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ \qquad x_2-x_3+x_4=0, \\ -x_1\qquad -x_3+2x_4=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-5x_4=0, \end{cases}$$

在 MATLAB 中输入

```
A =   [1  -2   3  -4
       0   1  -1   1
      -1   0  -1   2
       1  -3   4  -5]
a = null(A)
a =     0.7888   -0.2110
       -0.4999   -0.2889
       -0.2110   -0.7888
        0.2889   -0.4999
```

因而，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 0.788\,8 \\ -0.499\,9 \\ -0.211\,0 \\ 0.288\,9 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0.211\,0 \\ 0.288\,9 \\ 0.788\,8 \\ 0.499\,9 \end{pmatrix},$$

其中 k_1 与 k_2 为任意常数．

若求方阵 A 中含有最多零元素个数的解,可用下述程序得到.

```
function C = solution(A)
% 求方阵 A 的含有最多零元素个数的解
[l,u] = lu(A);
M1 = [];M2 = [];e = [];f = [];c = [];
r = rank(A);rf = size(A);n = rf(1,2);
k = 1;
for i = 1:r
   while k< = n
      if u(i,k)~ = 0
         e = [e,k];
         M1 = [M1,u(1:r,k)];
         k = k + 1;
         break;
      else
         f = [f,k];
         M2 = [M2,- u(1:r,k)];
      end
      k = k + 1;
   end
end
M2 = [M2,- u(1:r,k:n)];
f = [f,k:n];
for i = 1:(n - r)
   y = zeros((n - r),1);
   y(i) = 1;
   x = M1 \ (M2 * y);
   c = zeros(n,1);
   for j = 1:r
      c(e(j)) = x(j);
   end
   for j = 1:(n - r)
      c(f(j)) = y(j);
   end
   C = [C,c];
```

```
    end
```

则有

```
    e = solution(A)
    e =  -1    2
          1   -1
          1    0
          0    1
```

故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

二、恰定方程组的求解

恰定方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的求解比较简单. 一般可用两种方法:一种是利用逆矩阵求解 $\boldsymbol{X} = \mathrm{inv}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}$;另一种是用除法求解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{b}$. 两种方法的异同点是:算法上都采用 Guass 消去法,但用除法求解时,无需求 $\boldsymbol{A}$ 的逆,这样可以很好地保证求解时的计算精度,还能节省大量的计算时间. 当然也可以用 Cramer 法则求解方程组. 看下面程序及执行结果

```
    A = rand(100) * 1.e2;          % 产生 100×100 的随机系数矩阵
    x = ones(100,1);
    b = A * x;                     % 求方程右端向量
    tic                            % 开始计时
    y = inv(A) * b;                % 求逆矩阵法解方程组
    toc                            % 计时结束
    err = norm(y - x)              % 结果与精确解的范 - 2 误差
    res = norm(A * y - b)          % 方程的范 - 2 误差
    tic
    y = A \ b;                     % 除法解方程组
    toc
    err = norm(y - x)
    res = norm(A * y - b)
    tic
    a = det(A);                    % Cramer 法则解方程组
    for i = 1:100
```

```
    B = A;
    B(1:100, i) = b;
    y(i) = det(B)/a;
end
toc
err = norm(y - x)
res = norm(A * y - b)
```

结果为

```
elapsed_time =     0.1600    % 逆矩阵法结果
err =   1.1808e-012
res =   9.8094e-010
elapsed_time =     0.0500    % 除法结果
err =   7.3347e-013
res =   2.2204e-011
elapsed_time =     4.2300    % Cramer 法则结果
err =   7.1009e-013
res =   2.8744e-010
```

由结果可知，用除法耗时最少，大约只有逆矩阵法的 1/3，而 Cramer 法则约是它的 85 倍；而从误差分析来看，仍然是除法最精确. 可见，用除法求解恰定方程组，既省时又精确. 值得注意的是，利用逆矩阵 inv($\boldsymbol{A}$) 求解时，若 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，则要用广义逆 pinv($\boldsymbol{A}$) 来求.

三、超定方程组的求解

由于超定方程组无解，而在实际应用中，能求得其最小二乘解也是有意义的，这时，方程组的求解仍可用除法和广义逆矩阵法，不过这样求得的解不会满足 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$，而是其最小二乘意义下的解，即解 $\boldsymbol{X} = \mathrm{inv}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}'\boldsymbol{b}$. 如

```
A = [3  4  5;6  1  2;4  -5  7;8  2  4];
b = [3  2  4  6]';
rank(A) = 3
x = A \ b
x =  0.4149
     0.0448
     0.3737
A * x - b
ans =  0.2924
```

```
  1.2815
  0.0516
- 1.0966
```

可见，x 不是 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的精确解.

四、欠定方程组的求解

从理论上说，欠定方程组有无穷多组解. 这时，我们仍然可用广义逆矩阵法和矩阵除法求解方程组，但前者所求的解是所有解中范数最小的一个，而后者所求的解是所有解中含零个数最多的一个，因而两种解法的结果一般会有所不同. 但它们求出的解是所有解系中的一个特解，要求其通解，则先解其对应的齐次方程的通解，然后再加上自身的一个特解即可. 值得注意的是，用除法求解欠定方程组时，会提出警告，并给出系数矩阵的秩，但警告并不会影响方程求解，如

```
A = [1 -2 3;0 1 -1;-1 0 -1;1 -3 4];
b = [4 -3 -4 1]';
x = pinv(A) * b
x = 2.2549
    1.2157
    1.0392
y = A \ b
Warning: Rank deficient, rank = 2  tol =   4.6151e-015.
y =   0
      3.4706
      3.2941
B = null(A)
B = 0.5774
  - 0.5774
  - 0.5774
```

故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0.5774 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.2549 \\ 1.2157 \\ 1.0392 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0.5774 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3.4706 \\ 3.2941 \end{pmatrix}$$

五、求线性方程组的非负最小二乘解

某些情况下,所得线性方程组的解是没有意义的,这时,其非负最小二乘解比方程组的精确解更有用.MATLAB 提供了一个函数 nnls(),是专门用来求方程组的非负最小二乘解的,用法如下

[x,w] = nnls($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)	返回方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的非负最小二乘解,这时限定 $\boldsymbol{x}>=0$;
[x,w] = nnls($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$,tol)	指定误差 tol 求解,tol 的默认值为 max(size($\boldsymbol{A}$)) * norm($\boldsymbol{A}$,1) * eps

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 1 范数越大,求解的误差越大.返回值是一个双向量 $\boldsymbol{w}$.当 $\boldsymbol{x}(i)=0$时, $\boldsymbol{w}(i)\leqslant 0$,而当 $\boldsymbol{x}(i)>0$ 时, $\boldsymbol{w}(i)$近似为零.如

```
A =   [3.4336   -0.5238    0.6710   -0.1527
      -0.5238    3.2833   -0.7302   -0.2689
       0.6710   -0.7302    4.0261   -0.0984
      -0.1572   -0.2689   -0.0984    2.7507];
b=[-1 1.5 2.5 -2]';
[x w]=nnls(A,b)
x =       0              w = -3.3424
    0.7102                  0.0000
    0.7276                  0.0000
         0                 -4.5366
a=A\b
a =  -0.3925
      0.5087
      0.7622
     -0.6725
A*a-b=                    A*x-b=
1.0e-015 *
  0.1110                  1.1162
 -0.2220                  0.3006
       0                  -0.0891
  0.2220                  1.7374
```

由上述结果知, $\boldsymbol{a}$ 为方程组的精确解,而 $\boldsymbol{x}$ 为方程组的非负最小二乘解,当然后者的误差远远大于前者.

用 Guass 消去法求解某些方程组时,虽然从理论上可以得到精确解,但由于

计算的误差，有时会出现病态，即结果出现很大偏差．因而，在求解线性方程组时，一定要检验其解的正确程度，看是否出现了病态．

第三节　矩阵特征值与特征向量

特征值与特征向量是线性代数中一个非常重要的概念，在工农业生产实际问题的求解中有着广泛的应用．

一、求矩阵的特征值与特征向量

特征值 λ 与特征向量 $\boldsymbol{X}$ 满足关系 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，而对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，其广义特征值 λ 与广义特征向量 $\boldsymbol{X}$ 满足关系 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{BX}$，这里 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵．在 MATLAB 中可用如下函数求矩阵的特征值与特征向量．

$\boldsymbol{d}$ = eig($\boldsymbol{A}$)　　　返回由矩阵特征值组成的列向量．

[$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{d}$] = eig($\boldsymbol{A}$)　　返回特征向量矩阵 $\boldsymbol{v}$ 和特征值矩阵 $\boldsymbol{d}$，其中 $\boldsymbol{d}$ 为对角阵，且满足　$\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{vd}$．

若将 eig($\boldsymbol{A}$)换成 eig($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$)，则返回广义特征值与特征向量，且满足 $\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{Bvd}$，各特征向量的范数为 1．若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则广义特征值问题等价于求 inv($\boldsymbol{B}$)$\boldsymbol{A}$ 的常义特征值问题．如

```
A=[1  4  2;0  -3  4;  0  4  3];
[v,d]=eig(A)
v=[ 1.0000    0.4082   -0.6667
    0.0000   -0.8165   -0.3333
    0.0000    0.4082   -0.6667]
d=[  1    0   0
     0   -5   0
     0    0   5]
```

二、矩阵的对角化

下述函数用来判断矩阵是否可对角化，若可对角化返回 1，否则返回 0．

```
function y=trigle(A)
y=1;c=size(A);
if c(1)~=c(2)
  y=0;
  return;
end
```