

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 - 200y_0 + 20x^2 \cdot \exp(x) \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x1 := 0 \quad x2 := 10 \quad n := 1000$$

$$z := \text{Bulstoer}(v, x1, x2, n, f)$$

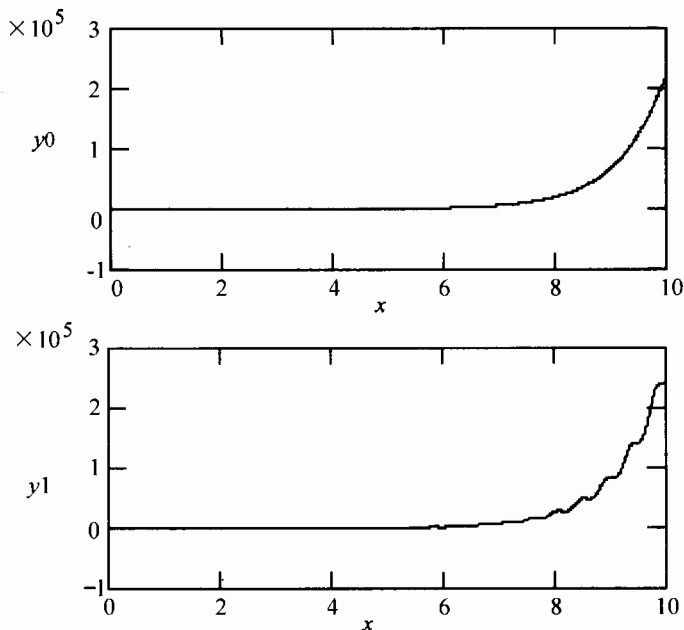


图 3-16 微分方程 $y'' - 2y' + 200y = 20x^2 \exp(x)$ 的特解

第七节 微积分应用模型

一、血吸虫病的数学模型

要建立血吸虫病的数学模型,就必须对血吸虫的生活史有全面的了解.血吸虫在终宿主体内(如人、家畜、野生动物等)配对产生虫卵,虫卵通过循环系统或组织排出体外.如果虫卵落入水中便孵出毛蚴,毛蚴侵入适宜螺类宿主(钉螺),在螺类宿主中发育成胞蚴,再由胞蚴发育成尾蚴.螺类于水中释放尾蚴,尾蚴再于水中入侵终宿主,进一步在终宿主体内成长、发育、交配、排卵,因而血吸虫病传播形成一回路系统(图 3-17).

Hairston 基于寄生虫的寿命表,提出了血吸虫的纯生殖率的估计,其数学表达式为

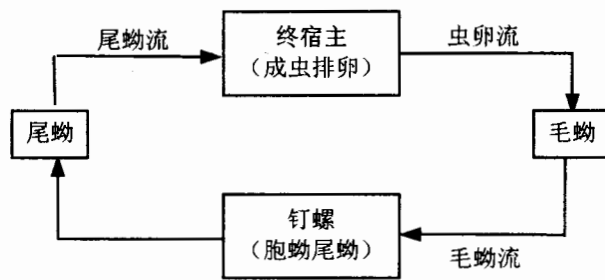


图 3-17 血吸虫病传播流程图

$$Z = T \times (C \times M) \times (Q \times f \times h) \times (d \times p \times i),$$

其中各项因素的估计方法如下

T (钉螺体内寄生虫的纯繁殖率, 即平均一个阳性钉螺排出的总尾蚴数): 在阳性钉螺的寿命表上, 存活至下一期的中点与平均逸出尾蚴数的乘积之和, 由于雌雄寿命不同, 故需分别计算. Hairston 计算出平均每个感染雌螺一生逸出尾蚴为 63.321 条, 雄螺为 37.843 条.

$C \times M$ (感染终宿主的概率): C 为尾蚴接触宿主的概率, M 为尾蚴入侵后在宿主体内发育形成成虫的概率. $C \times M$ 有如下关系式

$$\frac{F}{D} = \frac{C_1}{D} \times C \times M,$$

其中 D 为天数, $\frac{F}{D}$ 为每天尾蚴入侵宿主的成虫数, $\frac{C_1}{D}$ 为每天逸放尾蚴数.

$Q \times f \times h$ (终宿主体内寄生虫的生殖率): Q 为平均一条雌虫排出的总卵数, f 为虫卵进入粪便的概率, h 为虫卵能孵出毛蚴的概率. 要计算终宿主体内寄生虫的纯生殖率有两种方法: 一种是利用动物实验结果的产卵率来推算人体内寄生虫的纯生殖率, 这不太可靠; 另一种当然是直接计算粪便中的排卵量.

$d \times p \times i$ (感染钉螺的概率): d 为虫卵落到有螺水域中的概率; p 为毛蚴进入钉螺体内的概率, i 为毛蚴进入钉螺后能发育成尾蚴的概率. $d \times p \times i$ 有如下关系式

$$\frac{S}{D} = \frac{E}{D} \times h \times d \times p \times i,$$

其中 D 为天数, $\frac{S}{D}$ 为每天感染钉螺数, $\frac{E}{D}$ 为每天粪便中排出虫卵数, h 为虫卵的孵出率.

根据血吸虫病的传播流程, 将传播因素分成四个主要因素 (1) 寿命因素: 包括成虫在宿主体内的配对率及成虫寿命等; (2) 污染因素: 包括虫卵排出及进入

有螺水域的概率等;(3) 钉螺因素:包括毛蚴感染钉螺的概率,阳性钉螺的数量及寿命,毛蚴在钉螺体内的发育及尾蚴的逸出等;(4) 暴露因素:包括终宿主被感染的机会等.分析上述四要素知,要描述血吸虫病的传播规律,最主要的是求平均虫负荷数(m)和钉螺感染数(I).假设钉螺自然死亡率为 δ ,而钉螺感染变化率与未感染钉螺量成正比,则钉螺感染变化率为

$$\frac{dI}{dt} = -\delta I + C(m)(S - I),$$

式中 S 表示钉螺总数, $C(m)$ 为感染率,它与平均成对虫数 $P(m)$ 成正比,可表示为

$$C(m) = P(m)B,$$

B 为独立于 m 的一个因子,假定 S 为常数,则虫负荷变化率为

$$\frac{dm}{dt} = -\gamma m + A \frac{I}{S}.$$

式中 A 为由钉螺感染于宿主体内发育成成虫的比例系数, γ 为在宿主体内成虫的死亡率.

若假定上述 $C(m) = C$ 为常数,则当 $\frac{dI}{dt} = 0$ 时

$$I^* = \frac{C}{C + \delta} S,$$

显然,若 $I < I^*$,则 $\frac{dI}{dt} > 0$, I 将增加;若 $I > I^*$,则 $\frac{dI}{dt} < 0$, I 将减小;当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I \rightarrow I^*$,故有

$$\frac{I}{S} \rightarrow \frac{I^*}{S} = \frac{C}{C + \delta} = \frac{P(m)B}{P(m)B + \delta},$$

于是有

$$\frac{dm}{dt} = -\gamma m + A \frac{P(m)B}{P(m)B + \delta},$$

当 $dm/dt = 0$,即虫负荷变化达到平衡状态时,设 $P(m) = m\alpha(m)$,其中 $\alpha(m)$ 为成虫配对率,则有

$$-\gamma m + \frac{ABm\alpha(m)}{Bm\alpha(m) + \delta} = 0,$$

显然 $m = 0$ 为其一个解,另一解为

$$m = \frac{A}{\gamma} - \frac{\delta}{B\alpha(m)},$$

上式亦可写成

$$\alpha(m) = \frac{\gamma\delta}{AB - mB\gamma},$$

$\alpha(m)$ 是一条直角双曲线, 当 $m = 0$ 时有截距 $\alpha(0) = \frac{\gamma\delta}{AB}$, 并有一条渐近线 $m = \frac{A}{\gamma}$.

Macdonald 根据虫数分布规律提出如下假设: 若在人群中平均虫体负荷为 m 条成虫, 则虫体中的配对率函数方程为

$$\begin{aligned}\alpha^*(m) &= 1 - \exp(-m) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!k!} (-m)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} (-m)^{2k+1} \right] \\ &= 1 - \exp(-m) [I_0(m) + I_1(m)],\end{aligned}$$

式中 $I_0(m)$ 和 $I_1(m)$ 称为 Bessel 函数, 显然, 当 $m \rightarrow \infty$ 时 $\alpha^*(m)$ 以 1 为极限. m 一旦确定, 则 $\alpha^*(m)$ 为一固定值, 可称为理论配对值. 不同的 $\alpha(m)$ 与 $\alpha^*(m)$ 的曲线有三种关系 (图 3-18):

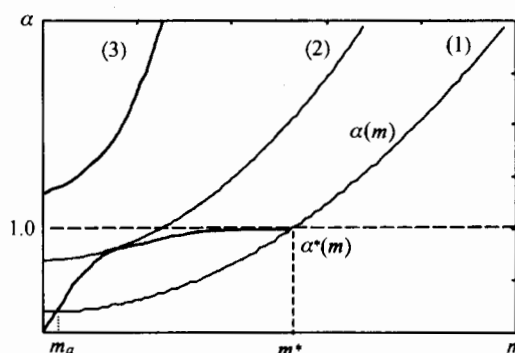


图 3-18 $\alpha(m)$ 与 $\alpha^*(m)$ 曲线关系图

(1) $\alpha(m)$ 与 $\alpha^*(m)$ 曲线有两个交点, 分别对应于 $m = m_a$ 与 $m = m^*$. 将 $\frac{dm}{dt}$ 关系式写为

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m}{mB\alpha(m) + \delta} (AB - mB\gamma) \left[\alpha(m) - \frac{\gamma\delta}{AB - mB\gamma} \right],$$

显然, 当 $m > m^*$ 时, $\frac{dm}{dt} < 0$; 当 $m_a < m < m^*$ 时, $\frac{dm}{dt} > 0$. 说明在一血吸虫流行区, 当平均虫体负荷 m 在 m^* 附近变动时, $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = m^*$ 趋于稳定, 故 m^* 称为稳定平衡点. 当 $0 < m < m_a$ 时, 说明当平均虫体负荷 m 在 m_a 附近变动时, 或者趋于消灭、或者逐渐增加, 并趋于 m^* , 所以 m_a 为不稳定平衡点, 称作转折点; (2) $\alpha(m)$ 与 $\alpha^*(m)$ 有一个切点, 这相当于平均虫体负荷不稳定的平衡点. (3) $\alpha(m)$ 与 $\alpha^*(m)$ 没有交点, 说明血吸虫病不会流行. Macdonald 给出了求 $\alpha^*(m)$ 的近似形式

$$\alpha^*(m) = \frac{0.88m}{m+1.73},$$

当 m 在 0 到 15 范围内时该式适用,超出此范围则导致误差偏大.

由此可见,在一个血吸虫病流行区,要控制血吸虫病的发展可采取两种策略:一种是降低血吸虫负荷,使其低于 m_0 ;另一种是改变各参数使 $\alpha(m)$ 上移,脱离 $\alpha^*(m)$ 曲线.

Rosenfield 利用可逆催化模型建立了触媒模型:

$$\frac{dy}{dt} = A(1-y) - By,$$

其中 y 表示已感染血吸虫病人口比率, $(1-y)$ 表示易感者的比率, A 表示感染血吸虫病的系数, B 表示消除病患的系数,解得

$$y = \frac{A}{A+B} - C \exp(-(A+B)t).$$

若起始时刻即 $t = 0$ 时,已感染血吸虫病人口比率为 y_0 ,则 $C = \frac{A}{A+B} - y_0$,故有

$$y = \frac{A}{A+B} - \left(\frac{A}{A+B} - y_0 \right) \exp(-(A+B)t),$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,感病人口比将稳定在 $\frac{A}{A+B}$.

二、植物营养生长中光合产物的分配

对植物生长来讲,至少有两种重要的物质分配方式:一种称为化学分配,其中最感兴趣的是碳(或其它元素或化合物)在不同的物质(如碳水化合物、蛋白质、有机酸等)之间的分配;另一种是指物质在植株的不同部分(如叶、根、果实、茎等)之间的分配.人们常常关心的是物质在植株各部分间的分配,以及植株的某一部分中不同化学物质间的二次分配.我们所讨论的模型是单一底物、三区隔的类型中,描述在光合作用下所产生的糖的去向问题(图 3-19).图中植物由叶、茎、根组成,分别用 l, s, r 表示.假设这几个区隔中的每一个的内部都是均一的,光合作用产生的同化物进入叶区隔,然后底物或者停留在叶子之中的底物库里(可以将其看作短期贮存物质),或者用于叶的生长,或者从叶子外运到茎中去,同样的考虑也适用于茎和根.

由生理学知,底物用于叶生长的消耗依赖于叶中底物水平,而不依赖于茎或根中底物的水平,且叶区隔中底物消耗的速率为

$$\frac{V_l k_l S_l}{K_l + S_l} \text{kgmolC} \cdot \text{t}^{-1} \text{ (C 表示碳原子)},$$

式中 V_l 是叶组织的体积; S_l 是叶区隔中底物浓度; k_l 为一常数, 它给出利用最大速率; K_l 是米氏常数(即利用速率为最大值的一半时 S_l 的值), 它是区隔对底物的亲和力的约略量度. 同样的式子也可用于茎和根(将式中的 l 用 s 或 r 代替)中底物的消耗, 假定用于生长的底物以转化效率 Y_G 转化为植物物质, 即 1 kg 底物产生 Y_G kg 干物质(底物与植物干物质用同一单位度量), 其余的 $(1 - Y_G)$ kg 底物则被呼吸消耗了, 因而产生新的叶物质的速率为

$$\frac{Y_G V_l k_l S_l}{K_l + S_l} \text{kgmolC} \cdot \text{t}^{-1} \text{ (C 表示碳原子),}$$

同样的式子也可用于茎和根. 如果这三个部分在成分上有显著差异, 那么就应放宽这个假设.

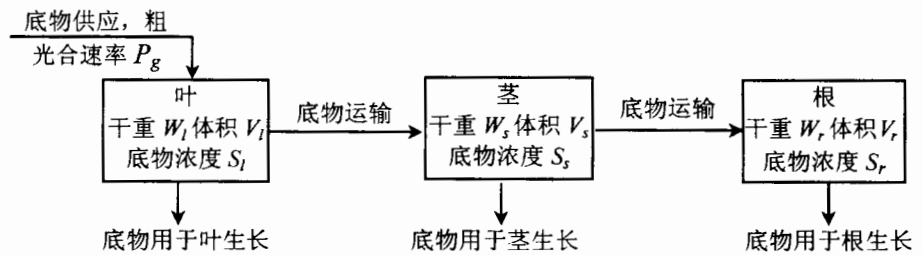


图 3-19 光合产物在叶、茎、根之间的分配

假定底物从叶向根运输中, 底物的通量依赖于浓度差 $S_l - S_r$, 则底物从叶到茎的通量为

$$\frac{\beta(S_l - S_r)}{r_{ls}} \text{kgmolC} \cdot \text{t}^{-1} \text{ (C 表示碳原子),}$$

其中 r_{ls} 为叶与茎之间的运输阻力, β 是一个常数, 用于调节阻力随植物大小而发生的变化. 与此类似, r_{sr} 是茎根间的阻力. 假设碳底物的供应是决定生长的主要因素, 且底物是由光合活动产生的. 如果叶、茎、根的微环境(除了底物浓度以外)是相同的, 则对叶、茎、根来讲, 有

$$k_l = k_s = k_r, \quad K_l = K_s = K_r,$$

在某种程度上, 现在的这种表达形式能够兼顾一些除了光合产物与生长因子以外的其它底物也有重要作用的情况. 如果叶、根、茎中氮的可供性不等, 则可通过调节各 k 与 K 的值来估计.

该模型的三个区隔的每一个都由两个变数即干重和底物浓度来描述. 若设植株的物质具有恒定的密度, 因而体积与重量成正比, 于是就可由六个变量描述这个系统. 根据物质守恒定律有

$$\text{底物变化速率} = \text{流入} - \text{流出} - \text{利用},$$

该方程可分别用于三个区隔,如对叶区隔来说,底物库大小为 $V_l S_l$,流入就是总光合速度 P_g ,流出即为叶向茎区隔的运输通量,利用速率即为叶区隔中底物消耗速率,于是有

$$\frac{d}{dt}(V_l S_l) = P_g - \frac{\beta(S_l - S_s)}{r_{ls}} - \frac{V_l k_l S_l}{K_l + S_l},$$

其中 t 为时间变量.类似地有

$$\frac{d}{dt}(V_s S_s) = \frac{\beta(S_l - S_s)}{r_{ls}} - \frac{\beta(S_s - S_r)}{r_{sr}} - \frac{V_s k_s S_s}{K_s + S_s},$$

$$\frac{d}{dt}(V_r S_r) = \frac{\beta(S_s - S_r)}{r_{sr}} - \frac{V_r k_r S_r}{K_r + S_r},$$

令植株密度为 $\rho \text{kgmolC} \cdot \text{m}^{-3}$ (C 表示碳原子),则

$$W_G = \rho V, W_i = \rho V_i, i = l, s, r,$$

其中 W_G 与 V 分别为植株总结构干物质和体积.于是新物质的合成速率为

$$\frac{dW_l}{dt} = \frac{Y_G V_l k_l S_l}{K_l + S_l},$$

类似可以写出茎与根的相应方程.由于通常测定的是干重而非体积,将上述几个方程中的体积全部转化为干重,则有

$$\begin{cases} \frac{d(W_l S_l)}{dt} = \rho P_g - \frac{\rho \beta(S_l - S_s)}{r_{ls}} - \frac{W_l k_l S_l}{K_l + S_l}, \\ \frac{d(W_s S_s)}{dt} = \frac{\rho \beta(S_l - S_s)}{r_{ls}} - \frac{\rho \beta(S_s - S_r)}{r_{sr}} - \frac{W_s k_s S_s}{K_s + S_s}, \\ \frac{d(W_r S_r)}{dt} = \frac{\rho \beta(S_s - S_r)}{r_{sr}} - \frac{W_r k_r S_r}{K_r + S_r} \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \frac{dW_l}{dt} = \frac{Y_G W_l k_l S_l}{\rho(K_l + S_l)}, \\ \frac{dW_s}{dt} = \frac{Y_G W_s k_s S_s}{\rho(K_s + S_s)}, \\ \frac{dW_r}{dt} = \frac{Y_G W_r k_r S_r}{\rho(K_r + S_r)}. \end{cases}$$

由这六个方程描述的植物营养生长中光合产物的分配模型含有六个状态变量 W_i 与 S_i ($i = l, s, r$), 共有 12 个参数, 即: $\rho, P_g, \beta, r_{ls}, r_{sr}, k_l, k_s, k_r, K_l, K_s, K_r$ 和 Y_G . 将上述两个方程组整理合并可得

$$\frac{d}{dt}(W_l S_l + W_s S_s + W_r S_r) + \frac{\rho}{Y_G} \cdot \frac{d}{dt}(W_l + W_s + W_r) = \rho P_g,$$

令 $W_G = W_l + W_s + W_r, W_G \bar{S} = W_l S_l + W_s S_s + W_r S_r$, 其中 \bar{S} 为平均浓度, 则有

$$P_s = \frac{1}{Y_G} \cdot \frac{dW_G}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{W_G \bar{S}}{\rho} \right),$$

由于 $\frac{W_G}{\rho} = V$, 故上式中右侧括号里的项就是总底物库. 它表明光合作用的产物或者被用于新的植物物质合成, 或者在储存库 $\frac{W_G \bar{S}}{\rho}$ 中出现.