```
syms x y z
f = x^2 + y^2 - z^2;
az = int(f, z, 0, (5 * (1 - x^2/3 - y^2/4))^0.5);
azy = int(az, y, 0, (4 * (1 - x^2/3))^0.5);
azyx = int(azy, 0, 3^0.5);
answer = 8 * azyx
```

执行结果为

```
answer  = 16/15 * 5^(1/2) * pi * 3^(1/2)
```

第五节　级　　数

一、常数项级数

对于常数项级数来说,我们所关心的是给定的常数项级数是否收敛？如果收敛,能否求出收敛级数和？考察部分和数列时,能否求出部分和的一般项？数学软件提供了除判断级数是否收敛以外的其它功能.因而,给定一个级数后,我们应先用常数项级数审敛法判断级数是否收敛,然后再根据判断结果做其它工作.应当注意的是,不是所有收敛的级数都能用数学软件求出收敛和.一般来讲,只有能求出部分和数列的一般项时,才能求出收敛和.例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 根据根值审敛法级数是收敛的,但其收敛和却不能用数学软件求出.

在 MATLAB 中,级数求和用 symsum( )函数,其用法如下

symsum(一般项)　　　　　用默认变量求级数和;

symsum(一般项,变量)　　　用指定变量求级数和;

symsum(一般项,变量,起始,终止)

用指定变量从“起始”到“终止”求级数和.

当“终止”值取有限值时,可求出级数指定项数的部分和,例如

```
symsum(1/n^2, n, 1, 10)                 ans  = 1968329/1270080
symsum(1/n, n, 1, 10)                   ans  = 7381/2520
symsum(1/((2 * n - 1) * 2 * n), n, 1, 10)   ans = 155685007/232792560
symsum((-1)^n/n, n, 1, 10)              ans  = -1627/2520
symsum((1 + n)/(1 + n^2), n, 1, 10)     ans  = 2745615458/846523925
symsum(n^2/3^n, n, 1, 10)               ans  = 88507/59049
symsum((n + 1)/(n * (n + 2)), n, 1, 10) ans  = 7852/3465
symsum(sin(n * pi/2)/2^n, n, 1, 10)     ans  = 205/512
```

```
symsum(cos(n*pi)/10^n,n,1,10)          ans = -909090909/10000000000
```

当“终止”值取 inf 时,可求出级数的收敛和,例如

```
syms n
symsum(1/n^2,n,1,inf)                  ans = 1/6*pi^2
symsum(1/n,n,1,inf)                    ans = inf
symsum(1/((2*n-1)*2*n),n,1,inf)        ans = log(2)
symsum((-1)^n/n,n,1,inf)               ans = -log(2)
symsum((1+n)/(1+n^2),n,1,inf)          ans = inf
symsum(n^2/3^n,n,1,inf)                ans = 3/2
symsum((n+1)/(n*(n+2)),n,1,inf)        ans = inf
symsum(sin(n*pi/2)/2^n,n,1,inf)        ans = 2/5
symsum(cos(n*pi)/10^n,n,1,inf)         ans = -1/11
```

当“终止”值为变量,比如取 m 时,可求得级数部分和数列的一般项,该一般项以 m 为变量,当 $m\to\infty$ 时取极限即得收敛和.例如

```
syms n m
symsum(1/n^2,n,m)             ans = -Psi(1,m+1)+Psi(1,n)
symsum(1/n,n,m)               ans = Psi(m+1)-Psi(n)
symsum(1/((2*n-1)*2*n),n,1,m)
ans = 1/2*Psi(m+1/2)-1/2*Psi(m+1)+log(2)
symsum((-1)^n/n,n,1,m)
ans = -log(2)-1/2*(-1)^(m+1)*(Psi(1+1/2*m)-Psi(1/2*m+1/2))
symsum((1+n)/(1+n^2),n,1,m)
ans = (1/2-1/2*i)*Psi(m+1-i)+(1/2+1/2*i)*Psi(m+1+i)+(-1/2
      +1/2*i) *Psi(1-i)+(-1/2-1/2*i)*Psi(1+i)
symsum(n^2/3^n,n,1,m)
ans = -3/2*(1/3)^(m+1)*(m+1)-3/2*(1/3)^(m+1)-3/2*(1/3)^(m+1)
      *(m+1)^2+3/2
symsum((n+1)/(n*(n+2)),n,1,m)
ans = -1/(2+m)-1/2/(m+1)/(2+m)+Psi(m+3)-3/4+eulergamma
symsum(sin(n*pi/2)/2^n,n,1,m)
ans = -2/5*cos(1/2*(m+1)*pi)/(2^(m+1))-4/5*sin(1/2*(m+1)*
      pi) /(2^(m+1))+2/5
symsum(cos(n*pi)/10^n,n,1,m)
ans = -10/11*cos((m+1)*pi)/(10^(m+1))-1/11
```

应当注意的是,MATLAB 不提供阶乘算子或函数,因而像 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$这样的级数和在 MATLAB 中无法求出,虽然可以编写一个求阶乘函数如下

```
function y = factorial(n)
if n == 0
   y = 1;
   return;
end
y = n * factorial(n - 1);
```

用该函数尽管可求出 n 的阶乘,但将其用于级数求和却得不到正确的结果.在 MathCAD 中不存在这样的问题,MathCAD 同样可以求级数的部分和、收敛和及级数部分和数列的一般项.例如求部分和如下

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}\to\frac{1968329}{1270080}\qquad\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}\to\frac{9864101}{3628800}$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}\to\frac{7381}{2520}\qquad\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\to\frac{15568500}{23279256}$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{(-1)^n}{n}\to\frac{-1627}{2520}\qquad\sum_{n=1}^{10}\frac{n^4}{n!}\to\frac{14796001}{362880}$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1+n}{1+n^2}\to\frac{2745615458}{846523925}\qquad\sum_{n=1}^{10}\frac{n^2}{3^n}\to\frac{88507}{59049}$$

求收敛和与求部分和数列的一般项的方法如下

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{6}\cdot\pi^2\qquad\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\to-\mathrm{Psi}(1,m+1)+\frac{1}{6}\cdot\pi^2$$

无论是 MATLAB 还是 MathCAD,求出的一般项中都可能出现一些标准函数,例如标准函数 psi(x)表示$\frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)]$,即 gamma 函数的一阶导数与其自身的商.其它函数不再赘述.

二、幂级数

对于给定的幂级数,我们主要关心以下问题:幂级数的收敛半径(收敛区间);在收敛区间的收敛和函数;将给定函数展开成幂级数等.在数学软件中,我们无法直接求出幂级数的收敛半径,但可由公式

$$R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

求得收敛半径,用与求常数项级数收敛和相同的办法求幂级数的收敛和函数.例

如在 MATLAB 中有

```
syms x n
limit((n+1)/n,n,inf)                               ans =1
symsum((-1)^(n-1)*x^n/n,n,1,inf)                   ans =log(1+x)
limit((2^(n+1)*(n+1))/(2^n*n),n,inf)               ans =2
symsum((x-1)^n/(2^n*n),n,1,inf)                    ans = -log(3/2-1/2*x)
limit(n/(n+1),n,inf)                               ans =1
symsum(n*x^(n-1),n,1,inf)                          ans =1/(x-1)^2
limit(sqrt((2*(n+1)-1)/(2*n-1)),n,inf) ans =1
symsum(x^(2*n-1)/(2*n-1),n,1,inf)
ans =1/2*x/(x^2)^(1/2)*log((1+(x^2)^(1/2))/(1-(x^2)^(1/2)))
```

上述 limit( )函数求出了收敛半径,symsum( )函数求出了幂级数的收敛和函数,要写出收敛区间,还需验证在端点处是否收敛,这一般需用手工审敛,请同学们自己做一下.幂级数的上述运算在 MathCAD 中与 MATLAB 中基本相同,如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\to\infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\to\exp(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\to 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}\cdot x^n}{n}\to\ln(1+x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\to 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}\to\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-1}{2(n+1)-1}}\to 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\to\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cdot\ln\left[\frac{(1+\sqrt{x^2})}{(1-\sqrt{x^2})}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2(n+1))!}}\to\frac{1}{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot x^{2n}}{(n!)^2}\to\frac{1}{\sqrt{1-4\cdot x^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}\to 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}\to -\ln\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)$$

请注意上面的开方(想想为什么).在数学软件中,一般都给出了把函数展开成幂级数的命令或函数.MATLAB 可用函数 Taylor()将函数展开成幂级数,其使用格式为

Taylor(函数,阶数 n,x_0 点,变量 x)

其功能是将给定"函数"在"x_0 点"处按"变量 x"展开成 $n-1$ 阶的泰勒级数.其中除了函数不能省略外,其它三个参数均可省略.当其它三个参数被省略后,按默认变量将给定函数展开成五阶麦克劳林级数."x_0 点"省略表示展开成麦克劳林级数;"阶数 n"省略默认展开为五阶,即最大到 x^5;"变量 x"省略默认用 findsym(f)查找默认变量.值得一提的是,后面的三个参数顺序还可以打乱次序给出,在不引起混淆的情况下均能给出正确结果,但若 x_0 点和阶数均为整数时必须阶数在前,x_0 点在后.例如

```
taylor(exp( - x), x , 8 , 7)
```

表示将 e^{-x} 在 $x_0=7$ 点处展开为七阶泰勒级数.泰勒级数展开举例如下

```
syms x n
taylor(exp(x))
ans  = 1 + x + 1/2 * x^2 + 1/6 * x^3 + 1/24 * x^4 + 1/120 * x^5
taylor(exp( - x), x , 8 , 7)
ans = exp( - 7) - exp( - 7) * (x - 7) + 1/2 * exp( - 7) * (x - 7)^2 - 1/6 *
      exp( - 7) * (x - 7)^3 + 1/24 * exp( - 7) * (x - 7)^4 - 1/120 * exp( - 7) *
      (x - 7)^5 + 1/720 * exp( - 7) * (x - 7)^6 - 1/5040 * exp( - 7)
      * (x - 7)^7
taylor(exp( - x^2), x , n)
ans  = exp( - n^2) - 2 * exp( - n^2) * n * (x - n) + exp( - n^2) * ( - 1 + 2 * n^2)
       * (x - n)^2 + exp( - n^2) * (2 * n - 4/3 * n^3) * (x - n)^3 + exp( - n^2) *
       (1/2 - 2 * n^2 + 2/3 * n^4) * (x - n)^4  + exp( - n^2) * ( - n + 4/3 * n^3 -
       4/15 * n^5) * (x - n)^5
taylor(exp( - x^2), x , 8)
ans  = 1 - x^2 + 1/2 * x^4 - 1/6 * x^6
taylor(sin(x), 8)
ans  = x - 1/6 * x^3 + 1/120 * x^5 - 1/5040 * x^7
taylor(cos(x), 8)
ans  = 1 - 1/2 * x^2 + 1/24 * x^4 - 1/720 * x^6
taylor((1 + x)^n)
ans  = 1 + n * x + 1/2 * n * (n - 1) * x^2 + 1/6 * n * (n - 1) * (n - 2) * x^3 + 1/24
       * n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * x^4 + 1/120 * n * (n - 1) * (n - 2) *
       (n - 3) * (n - 4) * x^5
taylor(log(1 + x), 10)
ans  = x - 1/2 * x^2 + 1/3 * x^3 - 1/4 * x^4 + 1/5 * x^5 - 1/6 * x^6 + 1/7 * x^7 - 1/8
       * x^8 + 1/9 * x^9
taylor(atan(x), 10)
ans  = x - 1/3 * x^3 + 1/5 * x^5 - 1/7 * x^7 + 1/9 * x^9
taylor(x^2 * atan(x), 10)
ans  = x^3 - 1/3 * x^5 + 1/5 * x^7 - 1/7 * x^9
```

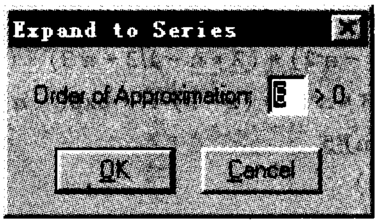
```
taylor(sin(x), pi/4)
ans = 1/2 * 2^(1/2) + 1/2 * 2^(1/2) * (x - 1/4 * pi) - 1/4 * 2^(1/2) * (x - 1/4 * pi)^2
      - 1/12 * 2^(1/2) * (x - 1/4 * pi)^3 + 1/48 * 2^(1/2) * (x - 1/4 * pi)^4
      + 1/240 * 2^(1/2) * (x - 1/4 * pi)^5
taylor(1/(x^2 - 2 * x - 3), 7, 1)
ans = - 1/4 - 1/16 * (x - 1)^2 - 1/64 * (x - 1)^4 - 1/256 * (x - 1)^6
taylor(1/(x^2 + 4 * x + 3), 7)
ans = 1/3 - 4/9 * x + 13/27 * x^2 - 40/81 * x^3 + 121/243 * x^4 - 364/729 * x^5
      + 1093/2187 * x^6
```

在 MathCAD 中,将函数展开成幂级数可用两种方法进行.下面我们以 e^x 为例展开幂级数.这两种方法分别是用菜单命令法和关键词法.

① 用菜单命令展开成幂级数的步骤如下:

(ⅰ) 输入函数 exp(x),并用编辑线选择变量 x.

(ⅱ) 单击菜单"Symbolics/Variable/Expand to series"命令,弹出对话框



在对话框中输入近似阶数 n(默认 $n=6$),即略去比 x^n 更高阶的无穷小,再按"OK"按钮即出现

$$1+x+\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{24}\cdot x^4+\frac{1}{120}\cdot x^5+O(x^6)$$

② 用关键词展开的步骤如下:

(ⅰ) 按 Ctrl + Shift + . 弹出指定代数运算符.

(ⅱ) 在左占位符处输入欲展开函数 exp(x).

(ⅲ) 在右占位符处输入 series, $x=x_0$, n. 其中 series 为关键词;x 为变量;"$=$"是由按键 Ctrl + = 得到,注意不是常规的等号,显示出来要粗些;x_0 为展开点,输 0 为麦克劳林级数,否则为泰勒级数;n 为欲展开的阶.这里 x_0 取 0,n 取 6,即得

$$\exp(x)\text{series}, x=0,6\rightarrow 1+x+\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{24}\cdot x^4+\frac{1}{120}\cdot x^5$$

比较上述两种方法知:使用菜单命令展开时有余项 $O(x^n)$,而关键词法则

没有,但它们所展开的最高次幂均为 $n-1$. 另外菜单命令法只能展开成麦克劳林级数,而关键词法既能展开成麦克劳林级数,又能展开成泰勒级数. 再举例如下,姑且用"="表示用菜单命令展开.

$$\exp(-x^2)\text{series}, x=n, 6 = \exp(-n^2) - 2\cdot\exp(-n^2)\cdot n\cdot(x-n) + \exp(-n^2)\cdot(-1+2\cdot n^2)\cdot(x-n)^2 + \exp(-n^2)\cdot\left(2\cdot n - \frac{4}{3}\cdot n^3\right)\cdot(x-n)^3 + \exp(-n^2)\cdot\left(\frac{1}{2} - 2\cdot n^2 + \frac{2}{3}\cdot n^4\right)\cdot(x-n)^4 + \exp(-n^2)\cdot\left(-n + \frac{4}{3}\cdot n^3 - \frac{4}{15}\cdot n^5\right)\cdot(x-n)^5$$

$$\exp((-x))\text{series}, x=7, 8 = \exp(-7) - \exp(-7)\cdot(x-7) + \frac{1}{2}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^2 + \frac{1}{6}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^3 + \frac{1}{24}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^4 - \frac{1}{120}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^5 - \frac{1}{720}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^6 - \frac{1}{5040}\cdot\exp(-7)\cdot(x-7)^7$$

$$\exp(-x^2) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^4 - \frac{1}{6}\cdot x^6 + O(x^8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7 + O(x^8)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + O(x^8)$$

三、傅立叶级数

傅立叶级数是一种非常重要的级数,它在工程计算和理论研究中都起着不可替代的作用. 但在数学软件中并不提供将函数展开成傅立叶级数的函数或命令,不过我们完全可以根据傅立叶级数的定义,将傅立叶级数的系数求出,然后再写出相应傅立叶级数.

在 MATLAB 中,编写以下四个函数 mfourier(f), msin(f), mcos(f)和 mlfourier(f, l),分别用于求函数 f 的傅立叶级数、正弦级数、余弦级数,以及周期为 $2l$ 的傅立叶级数的系数.

```
function [a0, an, bn] = mfourier(f)
syms n x
a0 = int(f, - pi, pi)/pi;
an = int(f * cos(n * x), - pi, pi)/pi;
bn = int(f * sin(n * x), - pi, pi)/pi;
function bn = msin(f)
syms n x
bn = 2 * int(f * sin(n * x), 0, pi)/pi;
```

```
function [a0,an] = mcos(f)
syms n x
a0 = 2 * int(f,0,pi)/pi;
an = 2 * int(f * cos(n * x),0,pi)/pi;
function [a0,an,bn] = mlfourier(f,l)
syms n x
a0 = int(f,-l,l)/l;
an = int(f * cos(n * pi * x/l),-l,l)/l;
bn = int(f * sin(n * pi * x/l),-l,l)/l;
```

如分别求函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

的傅立叶级数、正弦、余弦级数及周期为 8 的傅立叶展开系数. 首先需将上述三个函数的分段表达式写成统一表达式如下

$$f(x)=|x|,\quad g(x)=x/|x|,\quad h(x)=(x+|x|)/2,$$

则有

```
f = 'abs(x)';        g = 'x/abs(x)';        h = '(x + abs(x))/2';
[a0,an,bn] = mfourier(f)
a0  = pi
an  = (2 * (cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/n^2 - 2/n^2)/pi
bn  = 0
[a0,an,bn] = mfourier(g)
a0  = 0
an  = 0
bn  = ( - 2 * cos(pi * n)/n + 2/n)/pi
[a0,an,bn] = mfourier(h)
a0  = 1/2 * pi
an  = ((cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/n^2 - 1/n^2)/pi
bn  = - ( - sin(pi * n) + pi * n * cos(pi * n))/n^2/pi
[a0,an,bn] = mlfourier(f,4)
a0  = 4
an  = 8 * (cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/pi^2/n^2 - 8/pi^2/n^2
bn  = 0
```

```
[a0, an, bn] = mlfourier(g, 4)
a0  = 0
an  = 0
bn  = - 2 * cos(pi * n)/pi/n + 2/pi/n
[a0, an, bn] = mlfourier(h, 4)
a0  = 2
an  = 4 * (cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/pi^2/n^2 - 4/pi^2/n^2
bn  = - 4 * ( - sin(pi * n) + pi * n * cos(pi * n))/pi^2/n^2
[a0, an] = mcos(f)
a0  = pi
an  = (2 * (cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/n^2 - 2/n^2)/pi
[a0, an] = mcos(g)
a0  = 2
an  = 2 * sin(pi * n)/pi/n
[a0, an] = mcos(h)
a0  = pi
an  = (2 * (cos(pi * n) + pi * n * sin(pi * n))/n^2 - 2/n^2)/pi
bn = msin(f)
bn  = - 2 * ( - sin(pi * n) + pi * n * cos(pi * n))/n^2/pi
bn = msin(g)
bn  = ( - 2 * cos(pi * n)/n + 2/n)/pi
bn = msin(h)
bn  = - 2 * ( - sin(pi * n) + pi * n * cos(pi * n))/n^2/pi
```

在 MathCAD 中也可定义类似函数. 请同学们先定义出这些函数,然后以 $f(t)=t, g(t) = t^2$ 和 $h(t)=e^t$ 为例在 MathCAD 中求出傅立叶级数的系数.

第六节　数值微积分

一、数值微分

在实际应用中,通常要根据已知的数据点,求某点处的一阶或高阶导数;或者求任意函数在任一点处的任意阶导数,这就要用到数值微分. 数值微分的基本思路是先用逼近或拟合等方法将已知数据在一定范围内满足的近似函数求出,再用特定方法对此近似函数求微分. 如果函数事先给出,则无需第一步. 通常可用多项式求导法和中心差分法求数值微分.