```
[f,g,h] = dsolve('D2f + Dg + h = exp(x),f + D2g + Dh = sin(x),Df + g + D2h
    = cos(x)','Df(0) = 0,f(0) = 0,Dg(0) = 0,g(0) = 0,Dh(0) = 0,h(0) = 0','x')
```

由其结果可知,对于常微分方程组来说,虽然可用 MATLAB 求出方程组的解,但随着方程个数的增加,解的表达式会十分复杂,而且给出的往往都是复数域上的解.

第四节　多元函数微积分

同一元函数一样,多元函数微积分也是微积分的重要组成部分.这一部分主要包括多元函数极限、偏导数、全导数、二重积分、三重积分等.由于多元函数的复杂性,在数学软件中没有直接求重极限和重积分的函数,因而必须经手工变为单次极限和单次积分后才能求出结果.

一、多元函数极限

一般来说,多元函数沿不同路径趋向于某一点时,可能会出现不同的结果.往往在有的时候沿某些特殊路径函数都有极限,但沿任意路径时函数却没有了极限,可见多元函数极限与路径是密切相关的.另一方面,函数趋向于某点的极限如果存在,则沿任何路径时的极限值均相同.基于这一点,这里我们仅对极限存在的函数,求沿坐标轴方向的极限,即将求多元函数极限问题,化成求多次单极限的问题.例如

```
syms x y z a b
limit(limit((x^2 + y^2)/(sin(x) + cos(y)),0),pi)      ans = -pi^2
limit(limit(limit((x + y * z + exp(sin(x * z)))/(x + y/z),1),2),3)
ans = 21/5 + 3/5 * exp(sin(3))
limit(limit(x^2 + x * y + y^2,2),1)                     ans = 7
limit(limit((1 - cos(x^2 + y^2))/((x^2 + y^2) * exp(x^2 * y^2)),0),0)
ans = 0
```

但在 MATLAB 中却不能求出像

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

的极限,原因是第一次让 x 趋于零时同时消掉了 y,因而第二次就无法再对 y 求极限了.但在 MathCAD 中就不同了,MathCAD 可以正确求出上述二重极限.例如:

$$\lim_{y\to1}\ \lim_{x\to2}(x^2+x\cdot y+y^2)\to7$$

$$\lim_{y\to\pi}\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+y^2}{\sin(x)+\cos(y)}\to-\pi^2$$

$$\lim_{z\to3}\lim_{y\to2}\lim_{x\to1}\frac{(x+y\cdot z+\exp(\sin(x\cdot z)))}{x+\frac{y}{z}}\to\frac{21}{5}+\frac{3}{5}\cdot\exp(\sin(3))$$

$$\lim_{y\to0}\ \lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x\cdot y+4}}{x\cdot y}\to\frac{-1}{4}$$

$$\lim_{y\to0}\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\exp(x^2y^2)}\to0$$

可见在求多元函数极限方面,MathCAD 要优于 MATLAB.

二、多元函数偏导数

对多元函数中的某一变量求偏导数,等价于将其余变量看作常量,仅对该变量求导数.因此,求偏导数的问题就化为求普通一元函数导数的问题.可用本实验第一节所述求导数方法求偏导数.如在 MATLAB 中有

```
syms x y z t u v
diff(x^3 + 2 * x * y + y^2 - 6,'x')                    ans = 3 * x^2 + 2 * y
diff(x^3 + 2 * x * y + y^2 - 6,'y')                    ans = 2 * x + 2 * y
diff(x^3 + 2 * x * y + y^2 - 6,'x',2)                  ans = 6 * x
diff(x^3 + 2 * x * y + y^2 - 6,'y',2)                  ans = 2
diff(diff(x^3 + 2 * x * y + y^2 - 6,'x'),'y')          ans = 2
diff(2 * x^2 * y + 3 * x * y^2 - log(x) + cos(y) - 5,'x')   ans = 4 * x * y + 3 * y^2 - 1/x
diff(2 * x^2 * y + 3 * x * y^2 - log(x) + cos(y) - 5,'y')
ans = 2 * x^2 + 6 * x * y - sin(y)
diff(2 * x^2 * y + 3 * x * y^2 - log(x) + cos(y) - 5,'x',2)  ans = 4 * y + 1/x^2
diff(2 * x^2 * y + 3 * x * y^2 - log(x) + cos(y) - 5,'y',2)  ans = 6 * x - cos(y)
diff(diff(2 * x^2 * y + 3 * x * y^2 - log(x) + cos(y) - 5,'x'),'y')
ans = 4 * x + 6 * y
diff(x^2 + y^2 + z^2 - cos(x + y + z) * exp(x * y * z),x)
ans = 2 * x + sin(x + y + z) * exp(x * y * z) - cos(x + y + z) * y * z * exp(x * y * z)
diff(x^2 + y^2 + z^2 - cos(x + y + z) * exp(x * y * z),'y')
ans = 2 * y + sin(x + y + z) * exp(x * y * z) - cos(x + y + z) * x * z * exp(x * y * z)
diff(x^2 + y^2 + z^2 - cos(x + y + z) * exp(x * y * z),'z')
ans = 2 * z + sin(x + y + z) * exp(x * y * z) - cos(x + y + z) * x * y * exp(x * y * z)
```

```
diff(x^2 + y^2 + z^2 - cos(x + y + z) * exp(x * y * z), z)
ans = 2 * z + sin(x + y + z) * exp(x * y * z) - cos(x + y + z) * x * y * exp(x * y * z)
```

如果求高阶混合偏导数,则结果要复杂得多.如求函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\cos(x+y+z)\exp(xyz)$$

关于 x 的二阶、y 的一阶、z 的三阶混合偏导数,命令如下(结果略去)

```
diff(diff(diff(x^2 + y^2 + z^2 - cos(x + y + z) * exp(x * y * z),' x ', 2),' y '),'
  z ', 3)
```

在 MathCAD 中求法类似,仅举几个简单例子如下

$\frac{d}{dx}(x^3+2\cdot x\cdot y+y^2-6)\rightarrow 3\cdot x^2+2\cdot y$　　$\frac{d}{dy}(x^3+2\cdot x\cdot y+y^2-6)\rightarrow 2\cdot x+2\cdot y$

$\frac{d^2}{dx^2}(x^3+2x\cdot y+y^2-6)\rightarrow 6\cdot x$　　$\frac{d^2}{dy^2}(x^3+2x\cdot y+y^2-6)\rightarrow 2$

$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}(x^3+2x\cdot y+y^2-6)\rightarrow 2$

由结果可知,在多元函数求高阶偏导数的过程中,一个并不太复杂的函数求得的结果也会很长.另外,MATLAB 中还可以求抽象函数的偏导数,如

```
f = sym(' f(x , y , z)');
pretty(diff(f , x))
```

$$\frac{d}{dx}f(x,y,z)$$

```
pretty(diff(diff(f , y , 2), z))
```

$$\frac{d^3}{dz\,dy^2}f(x,y,z)$$

```
pretty(diff(f , x , 2))
```

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y,z)$$

另外,由于梯度向量的各坐标轴分量即为各方向上的偏导数,因而也可用 **jacobian( )**函数求偏导数,如

```
jacobian(log(z^( - y/x - x/y)))
ans = [(y/x^2 - 1/y) * log(z), ( - 1/x + x/y^2) * log(z), ( - y/x - x/y)/z]
jacobian(log(x^2 + sin(y)^2))
ans = [2 * x/(x^2 + sin(y)^2), 2 * sin(y) * cos(y)/(x^2 + sin(y)^2)]
```

对上述抽象函数有

```
pretty(jacobian(f))
      [   d                    d                   d              ]
      [ - - -  f(x, y, z)    - - - f(x, y, z)    - - - (x, y, z)  ]
      [   dx                   dy                  dz             ]
```

复合函数求导是导数的重要内容,在数学软件中,可直接求得复合函数的导数和偏导数.在 MATLAB 中,可先定义中间函数,然后再定义外层函数,即由内向外逐层定义,则可求得复合函数的导数.例如

```
t = x^2 * tan(x); y = sin(t^3);
diff(y,x)
 = cos(x^6 * tan(x)^3) * (6 * x^5 * tan(x)^3 + 3 * x^6 * tan(x)^2 * (1 + tan(x)^2))
u = x + y; v = x - y; z = u^2 + v^2;
diff(z,x) = 4 * x      diff(z,y) = 4 * y
x = sin(t); y = t^3; z = exp(x - 2 * y);
diff(z,t) = (cos(t) - 6 * t^2) * exp(sin(t) - 2 * t^3)
```

注意,若将上述复合函数的定义改为由外向内定义,则不能得出正确结果.在 MathCAD 中,求复合函数的导数时不必考虑定义的先后顺序,但必须将求导法则定义后才能得出正确结果,例如

$t(x) := x^2 \tan(x) \qquad y(t) := \sin(t^3)$

$\frac{d}{dx}y(t) := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}t(x)\right) \rightarrow 3\cdot\cos(t^3)\cdot t^2\cdot[2\cdot x\cdot\tan(x) + x^2\cdot(1+\tan(x)^2)]$

$z(u,v) := u^2 + v^2 \quad u(x,y) := x^2 + \sin(x) + y \quad v(x,y) := x\cdot\cos(y)$

$$\frac{d}{dx}z(u,v) := \left(\frac{d}{du}z(u,v)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}u(x,y)\right) + \left(\frac{d}{dv}z(u,v)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}v(x,y)\right)$$
$$= 2\cdot u\cdot(2\cdot x + \cos(x)) + 2\cdot v\cdot\cos(y)$$

$$\frac{d}{dy}z(u,v) := \left(\frac{d}{du}z(u,v)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}u(x,y)\right) + \left(\frac{d}{dv}z(u,v)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}v(x,y)\right)$$
$$= 2\cdot u - 2\cdot v\cdot x\cdot\sin(y)$$

$x(t) := \sin(t) \qquad y(t) := t^3 \qquad z(x,y) := \exp(x - 2y)$

$$\frac{d}{dt}z(x,y) := \left(\frac{d}{dx}z(x,y)\right)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \left(\frac{d}{dy}z(x,y)\right)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)$$
$$= \exp(\sin - 2\cdot y)\cdot\cos(t) - 6\cdot\exp(\sin - 2\cdot y)\cdot t^2$$

但若不定义求导法则,直接对 t 求导,则会得出结果为零的错误结论.

对于隐函数求导,无论是一元的还是多元的,都可以利用隐函数求导公式直接求导.方法是先将隐函数写成类似 $F(x,y,z)=0$ 的形式,再分别求出 F 对各变量的偏导数,最后利用隐函数求导公式即可求出.在 MATLAB 中,无论是用 jacobian( )函数,还是用 diff( )函数,都可以得出正确结果.在 MathCAD 中定义更为直观.例如,对一个方程确定的隐函数

$$x + y + z - \exp(-x - y - z) = 0$$

求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,在 MATLAB 中有

```
syms x y z u v
F = x + y + z - exp( - (x + y + z));
dx = diff(F , x);   dy = diff(F , y);   dz = diff(F , z);
dzx = - dx/dz
dzx  = ( - 1 - exp( - x - y - z))/(1 + exp( - x - y - z))
dzxy = diff(dzx , y);    dzxz = diff(dzx , z);
dz _ xy = - dzxy/dzxz
dz _ xy  = ( - exp( - x - y - z)/(1 + exp( - x - y - z)) - ( - 1 - exp( - x - y - z))/(1
        + exp( - x - y - z))^2 * exp( - x - y - z))/(exp( - x - y - z)/(1 +
        exp( - x - y - z)) + ( - 1 - exp( - x - y - z))/(1 + exp( - x - y - z))^2
        * exp( - x - y - z))
```

类似的问题也可在 MathCAD 中实现,请同学们自己验证.

对于由方程组确定的隐函数,求法类似.如对隐函数

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

分别求 y 和 z 对 x 的导数.在 MATLAB 中有

```
F = x^2 + y^2 + z^2 - 1;     G = x^2 + y^2 - 2 * z^2 - 1;
J = [diff(F , y), diff(F , z);diff(G , y), diff(G , z)];
J1 = [diff(F , x);diff(G , x)];
dyzx = J^( - 1) * J1
dyzx  =   [ 1/y * x]
          [    0   ]
```

也可用

```
Jy = [diff(F , x), diff(F , z);diff(G , x), diff(G , z)];
Jz = [diff(F , y), diff(F , x);diff(G , y), diff(G , x)];
dyx = - det(Jy)/det(J)          dyx  = - x/y
dzx = - det(Jz)/det(J)          dzx  = 0
```

得到相同结果.再如

```
F = x * u - y * v;        G = y * u + x * v;
J = [diff(F , u), diff(F , v);diff(G , u), diff(G , v)];
Jx = [diff(F , x);diff(G , x)];         Jy = [diff(F , y);diff(G , y)];
duvx = J^( - 1) * Jx
duvx  =  [x/(x^2 + y^2) * u + y/(x^2 + y^2) * v]
         [ - y/(x^2 + y^2) * u + x/(x^2 + y^2) * v]
duvy = J^( - 1) * Jy
```

```
duvy = [ - x /(x^2 + y^2) * v + y/(x^2 + y^2) * u]
          [ x/(x^2 + y^2) * u + y/(x^2 + y^2) * v]
```

在 MathCAD 中求下述函数中 u 和 v 对 x 的偏导数,必须写成

$$F(x,y,u,v) := x\cdot u - y\cdot v \qquad G(x,y,u,v) := y\cdot u + x\cdot v$$

$$\begin{bmatrix} dux(x,y,u,v) \\ dvx(x,y,u,v) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{d}{du}F(x,y,u,v) & \frac{d}{dv}F(x,y,u,v) \\ \frac{d}{du}G(x,y,u,v) & \frac{d}{dv}G(x,y,u,v) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}F(x,y,u,v) \\ \frac{d}{dx}G(x,y,u,v) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(x\cdot u + y\cdot v)}{(x^2+y^2)} \\ \frac{-(y\cdot u - x\cdot v)}{(x^2+y^2)} \end{bmatrix}$$

三、重积分

重积分计算的本质与定积分是类似的,只不过要将一维的积分改为二维三维乃至多维来积分.按照重积分的计算方法,一般仍是将重积分化成多次单定积分来计算.现行数学软件中没有直接计算重积分的函数或命令,因而我们仍用求定积分的方法来求重积分.问题的关键是如何确定积分区域,即积分上下限的问题.这里我们可以借助数学软件的图形功能观察积分区域,并依此确定积分上下限.如利用 MATLAB 求二重积分

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由直线 $y=2x$, $y=x/2$, $y=12-x$ 围成的闭区域.计算如下:划定积分区域,将 x 分成二个区间[0,4]和[4,8]然后计算两次单定积分(如图 3-7).

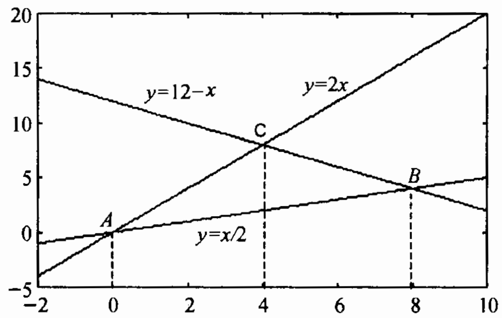

图 3-7 积分区域的划分

```
syms x y
f = x^2/y^2; y1 = 2 * x; y2 = x/2; y3 = 12 - x;
```

```
ezplot(y1); hold on; ezplot(y2); hold on; ezplot(y3,[-2,10])
A = int(int(f,y,x/2,2*x),x,0,4) + int(int(f,y,x/2,12-x),x,4,8)
A = 132 - 144*log(2)
```

划分好积分区域亦可用 MathCAD 计算

$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{x^2}{y^2}dydx+\int_4^8\int_{\frac{x}{2}}^{12-x}\frac{x^2}{y^2}dydx \rightarrow 132+144\ln(4)-144\ln(8)$$

若要再求 $\iint\limits_D \exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为：$x^2+y^2\leqslant a^2$，则必须换成极坐标形式，这时有

```
int(int(y*exp(-y^2),y,0,a),x,0,2*pi)
ans = pi*(-1+exp(a^2))*exp(-a^2)
```

或

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \exp(-r^2)rdrd\theta \rightarrow -(\exp(-a^2)-1)\cdot\pi$$

另外，数学软件还可以求多重不定积分，如

```
int(int(int((x+y+z),z),y),x)
ans = 1/2*x^2*z*y+1/2*y^2*z*x+1/2*z^2*y*x
```

$$\iiint(x+y+z)dzdydx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot z\cdot y\cdot+\frac{1}{2}\cdot y^2\cdot z\cdot x+\frac{1}{2}\cdot z^2\cdot y$$

三重积分的计算思路与二重积分相同，不同的只是在确定积分限时会更加繁琐，一般要根据几何投影图来确定. 例如计算三重积分

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2-z^2)\mathrm{d}v,$$

其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}\leqslant 1$.

可先用下述程序绘制积分区域的立体图（如图 3－8）

```
x = 0:3^0.5/50:3^0.5;
y = 0:2/50:2;
z = 0;
for i = 1:51
  for j = 1:51
    z(j,i) = ((1-x(i)^2/3-y(j)^2/4)*5)^0.5;
    if imag(z(j,i))<0
      z(j,i) = nan;
    end
    if imag(z(j,i))>0
      z(j,i) = nan;
```

```
    end
  end
end
mesh(x,y,z);hold on;mesh(x,y,-z);
mesh(x,-y,z);mesh(x,-y,-z);mesh(-x,y,z)
mesh(-x,y,-z);mesh(-x,-y,z);mesh(-x,-y,-z)
```

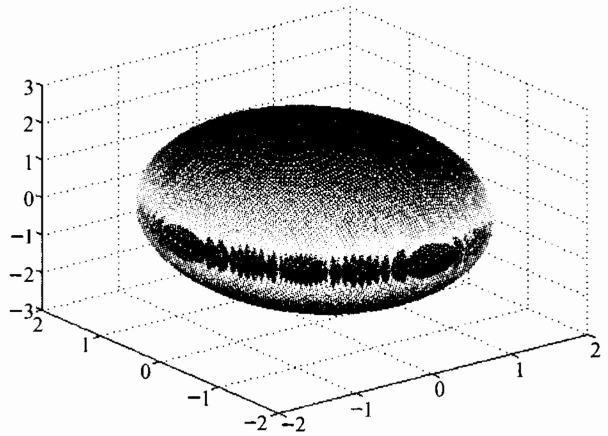

图 3-8 三重积分区域图

为了得到积分限,分别用命令 view(90,0)和 view(0,90)将其投影在 xOy 平面和 yOz 平面(图 3-9 和图 3-10),然后用下述程序可得积分结果.想想为什么?

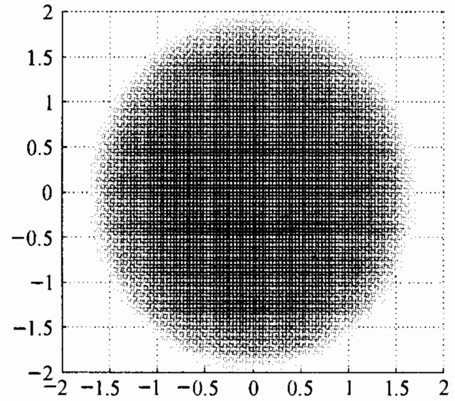

图 3-9 xOy 平面投影图

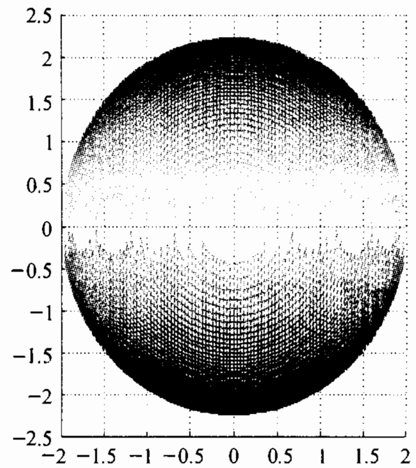

图 3-10 yOz 平面投影图

```
syms x y z
f = x^2 + y^2 - z^2;
az = int(f , z , 0 ,(5 * (1 - x^2/3 - y^2/4))^0.5);
azy = int(az , y , 0 ,(4 * (1 - x^2/3))^0.5);
azyx = int(azy , 0 , 3^0.5);
answer = 8 * azyx
```

执行结果为

```
answer  = 16/15 * 5^(1/2) * pi * 3^(1/2)
```

第五节　级　　数

一、常数项级数

对于常数项级数来说,我们所关心的是给定的常数项级数是否收敛? 如果收敛,能否求出收敛级数和? 考察部分和数列时,能否求出部分和的一般项? 数学软件提供了除判断级数是否收敛以外的其它功能. 因而,给定一个级数后,我们应先用常数项级数审敛法判断级数是否收敛,然后再根据判断结果做其它工作. 应当注意的是,不是所有收敛的级数都能用数学软件求出收敛和. 一般来讲,只有能求出部分和数列的一般项时,才能求出收敛和. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 根据根值审敛法级数是收敛的,但其收敛和却不能用数学软件求出.

在 MATLAB 中,级数求和用 symsum( )函数,其用法如下

symsum(一般项)　　　　　用默认变量求级数和;

symsum(一般项,变量)　　　　用指定变量求级数和;

symsum(一般项,变量,起始,终止)

　　用指定变量从“起始”到“终止”求级数和.

当“终止”值取有限值时,可求出级数指定项数的部分和,例如

```
symsum(1/n^2 , n , 1 , 10)                ans  = 1968329/1270080
symsum(1/n , n , 1 , 10)                  ans  = 7381/2520
symsum(1/((2 * n - 1) * 2 * n), n , 1 , 10)   ans = 155685007/232792560
symsum(( - 1)^n/n , n , 1 , 10)           ans  = - 1627/2520
symsum((1 + n)/(1 + n^2), n , 1 , 10)     ans  = 2745615458/846523925
symsum(n^2/3^n , n , 1 , 10)              ans  = 88507/59049
symsum((n + 1)/(n * (n + 2)), n , 1 , 10) ans  = 7852/3465
symsum(sin(n * pi/2)/2^n , n , 1 , 10)    ans  = 205/512
```