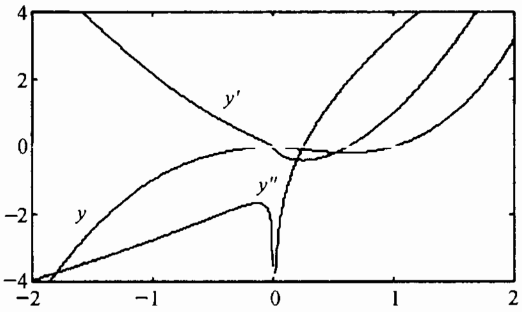

图 3-5　例 2 的函数及其一、二阶导数图

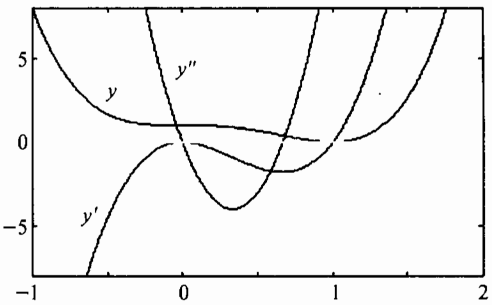

图 3-6　例 3 的函数及其一、二阶导数图

第二节　不定积分、定积分与反常积分

与导数和微分一样，积分是微积分的重要组成部分之一. 但相对于求导数来讲，求积分就难多了. 这是因为有相当多的函数在初等函数范围内是不可积的. 对于这类函数，我们虽然无法求出其不定积分，但却可以借助于数值方法求出其数值积分.

一、不定积分

不定积分是积分的最基本运算. 用手工计算不定积分时，一般用换元积分法和分部积分法，其步骤繁多且易出错，而用数学软件求不定积分则非常简单. 但由于目前人工智能水平的限制，并不是所有能用手工求出来的积分，都能用机器求出，而且对于不同的数学软件，所能求出的不定积分的范围也不相同. 在 MATLAB 中，求不定积分的命令为

int(被积函数,积分变量)

在不引起误会的情况下,积分变量可以省略. 例如

```
syms x a b
int(x * log(x))
ans = 1/2 * x^2 * log(x) - 1/4 * x^2
int(1/(1 + sqrt(1 - x^2)))
ans = - 1/x + 1/x * (1 - x^2)^(3/2) + x * (1 - x^2)^(1/2) + asin(x)
int(1/(x + sqrt(1 - x^2)))
ans = 1/4 * log(2 * x^2 - 1) - 1/8 * 2^(1/2) * ( - 4 * (x - 1/2 * 2^(1/2))^2 - 4 * 2^(1/2)
      * (x - 1/2  * 2^(1/2))  + 2)^(1/2) + 1/2 * asin(x) + 1/4 * atanh((1 - 2^(1/2)
      * (x - 1/2 * 2^(1/2)))  * 2^(1/2)/( - 4 * (x - 1/2 * 2^(1/2))^2 - 4 * 2^(1/2)
      * (x - 1/2 * 2^(1/2)) + 2)^(1/2))  + 1/8 * 2^(1/2) * ( - 4 * (x + 1/2 * 2^(1/2))^2
      + 4 * 2^(1/2) * (x + 1/2 * 2^(1/2)) + 2)^(1/2) - 1/4 * atanh((1 + 2^(1/2)
      * (x + 1/2 * 2^(1/2))) * 2^(1/2)/( - 4 * (x + 1/2 * 2^(1/2))^2 + 4 * 2^(1/2)
      * (x + 1/2 * 2^(1/2)) + 2)^(1/2))
simplify(ans)
ans = 1/4 * log(2 * x^2 - 1) + 1/2 * asin(x) - 1/4 * atanh(1/2 * ( - 2 + x * 2^(1/2))
      * 2^(1/2)/(1    - x^2)^(1/2)) - 1/4 * atanh(1/2 * (2 + x * 2^(1/2))
      * 2^(1/2)/(1 - x^2)^(1/2))
pretty(ans)
```

$$1/4\ \log(2\ x^2 - 1)\ +\ 1/2\ \mathrm{asin}(x)\ -\ 1/4\ \mathrm{atanh}\left(1/2\ \frac{(-2 + x2^{1/2})2^{1/2}}{(1 - x^2)^{1/2}}\right)$$

$$-1/4\ \mathrm{atanh}\left(1/2\ \frac{(2 + x2^{1/2})2^{1/2}}{(1 - x^2)^{1/2}}\right)$$

```
int((7 * x^13 + 10 * x^8 + 4 * x^7 - 7 * x^6 - 4 * x^3 - 4 * x^2 + 3 * x + 3)/(x^14 - 2 * x^8
    - 2 * x^7 - 2 * x^4 - 4 * x^3 - x^2 + 2 * x + 1))
ans = 1/2 * log(x^7 - 2^(1/2) * x^2 + ( - 2^(1/2) - 1) * x - 1) * 2^(1/2)
      + 1/2 * log(x^7 - 2^(1/2)  * x^2 + ( - 2^(1/2) - 1) * x - 1) + 1/2 * log(x^7
      + 2^(1/2) * x^2 + (2^(1/2) - 1) * x - 1) - 1/2  * log(x^7 + 2^(1/2) * x^2
      + (2^(1/2) - 1) * x - 1) * 2^(1/2)
int(cos(log(x)))
ans = 1/2 * x * (sin(log(x)) + cos(log(x)))
int(exp(x) * (sin(x))^2)
ans = 1/5 * (sin(x) - 2 * cos(x)) * exp(x) * sin(x) + 2/5 * exp(x)
int(sin(x) * cos(x)/(sin(x) + cos(x)))
```

```
ans = - 1/2 * 2^(1/2) * atanh(1/4 * (2 * tan(1/2 * x) - 2) * 2^(1/2))
      + 1/2 * (2 * tan(1/2 * x) - 2) /(1 + tan(1/2 * x)^2)
int(exp(sin(x)) * (x * cos(x)^3 - sin(x))/cos(x)^2)
ans = (x + x * exp(2 * i * x) - 2 * exp(i * x))/(1 + exp(2 * i * x)) * exp(sin(x))
int(exp(a * x) * cos(b * x))
ans = a/(a^2 + b^2) * exp(a * x) * cos(b * x) + b/(a^2 + b^2) * exp(a * x) * sin(b * x)
int(exp(a * x) * cos(b * x), x)
ans = a/(a^2 + b^2) * exp(a * x) * cos(b * x) + b/(a^2 + b^2) * exp(a * x) *
      sin(b * x)
```

在 MathCAD 中,上述几个例子的结果如下

$$\int x\cdot\ln(x)dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln(x)-\frac{1}{4}\cdot x^2$$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx \rightarrow \frac{-1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-x^2}+\operatorname{asin}(x)$$

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\ln(2\cdot x^2-1)-\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+2}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{asin}(x)$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\operatorname{atanh}\left[\left[1-\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+2}}\right]$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+2}$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\operatorname{atanh}\left[\left[1+\sqrt{2}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{2}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+2}}\right]$$

$$\int\frac{7x^{13}+10x^8+4x^7-7x^6-4x^3-4x^2+3x+3}{x^{14}-2x^8-2x^7-2x^4-4x^3-x^2+2x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[x^7-\sqrt{2}\cdot x^2+(-\sqrt{2}-1)\cdot x-1\right]\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left[x^7-\sqrt{2}\cdot x^2+(-\sqrt{2}-1)\cdot x-1\right]$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\ln\left[x^7+\sqrt{2}\cdot x^2+(\sqrt{2}-1)\cdot x-1\right]-\frac{1}{2}\cdot\ln\left[x^7+\sqrt{2}\cdot x^2+(\sqrt{2}-1)\cdot x-1\right]\sqrt{2}$$

$$\int\cos(\ln(x))dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot(\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x)))$$

$$\int\exp(x)\cdot\sin(x)^2dx \rightarrow \frac{1}{5}\cdot(\sin(x)-2\cdot\cos(x))\cdot\exp(x)\cdot\sin(x)+\frac{2}{5}\cdot\exp(x)$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx \to \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{atanh}\left[\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)-2\right)\cdot\sqrt{2}\right]+\frac{1}{2}\cdot \frac{\left(2\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)-2\right)}{\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)^2+1\right)}$$

$$\int \frac{\exp(\sin(x))(x\cdot\cos(x)^3-\sin(x))}{\cos(x)^2}dx \to \frac{(x\cdot\exp(2i\cdot x)+x-2\cdot\exp(i\cdot x))}{(\exp(2i\cdot x)+1)}\cdot \exp(\sin(x))$$

$$\int \exp(a\cdot x)\cos(b\cdot x)dx \to \frac{a}{(a^2+b^2)}\cdot\exp(a\cdot x)\cdot\cos(b\cdot x)+\frac{b}{(a^2+b^2)}\cdot \exp(a\cdot x)\cdot\sin(b\cdot x)$$

但无论是 MATLAB 还是 MathCAD,有些积分都无法求出来,如积分

$$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

就积不出来,甚至在 Maple 中也求不出来,但在 Mathematica 中却能求出来,结果为

$$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{2x}{3}-\frac{x^3}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x$$

这可能是由于 Maple 软件的符号运算功能不如 Mathematica 强,而 MATLAB 与 MathCAD 的符号运算功能均借用了 Maple 软件的符号处理内核的缘由.

二、定积分与反常积分

一般对于定积分的计算,除了采用 Newton-Leibniz 公式外,直接使用换元积分和分部积分的方法也是计算定积分的基本方法.对于初等函数范围内的不可积函数,还可以使用数值积分来求定积分的近似值.在 MATLAB 中,求定积分的命令为

int(被积函数,积分变量,积分下限,积分上限)

在计算定积分时,除了指定的积分变量外,其它变量或参数均被视为常数.对于无穷限反常积分,只需将对应的上、下限用 ± inf 替换;对于无界函数的反常积分,其求法与普通定积分求法相同.

```
syms x a t
eval(int(1/(x * sqrt(1 + log(x))), x, 1, exp(2)))   ans = 1.4641
eval(int(exp( - x^2), x, - 1, 1))                    ans = 1.4936
eval(int(exp( - x^2), x, - inf, 1))                  ans = 1.6331
eval(int(exp( - x^2), x, - inf, inf))                ans = 1.7725
```

```
int(cos(x) * cos(2 * x), x, - pi/2, pi/2)          ans = 2/3
int(asin(x)^2/sqrt(1 - x^2), x, - 1/2, 1/2)        ans = 1/324 * pi^3
int(x * exp( - x), x, 0, 1)                        ans = - 2 * exp( - 1) + 1
int(log(x)/sqrt(x), x, 1, 4)                       ans = 8 * log(2) - 4
eval(int(sin(log(x)), x, 1, exp(1)))               ans =  0.9093
int(x/sqrt(1 - x^2), x, 0, 1)                      ans = 1
int(x/sqrt(x - 1), x, 1, 2)                        ans = 8/3
int(1/x^4, x, 1, inf)                              ans = 1/3
int(exp( - a * x), x, 0, inf)
ans = limit( - 1/a * exp( - a * x) + 1/a, x = inf)
int(1/(x^2 + 2 * x + 2), x, - inf, inf)            ans = pi
int((x + sin(x))/(1 + cos(x)), x, 0, pi/2)         ans = 1/2 * pi
limit(int(exp( - t^2), t, cos(x), 1)/x^2, x, 0)    ans = 1/2 * exp( - 1)
diff(int(1/sqrt(1 + t^4), t, x^2, x^3))
ans = 3 * x^2/(1 + x^12)^(1/2) - 2 * x/(1 + x^8)^(1/2)
```

对于带参变量的反常积分,如上述积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$,由于参变量的不确定性,因而求出的结果为一极限式子.但对于一般带参变量的积分,则能得出最终结果;对于带绝对值的积分,也能得出正确结果.例如

```
int(cos(a * x), x, - pi/2, pi/2)      ans = 2 * sin(1/2 * pi * a)/a
int(1/(1 + x^2), x, a, b)             ans = atan(b) - atan(a)
int(abs(sin(x)), x, 0, 2 * pi)        ans =  4
int(1/(1 + t^2), t, x, 1)             ans = 1/4 * pi - atan(x)
int(1/(1 + t^2), t, 1, 1/x)           ans = atan(1/x) - 1/4 * pi
```

在 MathCAD 中,定积分和反常积分的计算结果与 MATLAB 十分相似.例如,同样求上述几个积分,则有

$$\int_1^{\exp(2)} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1+\ln(x)}}dx \to 2\cdot\sqrt{3}-2 = 1.464 \qquad \int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = 1.494$$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(2x)dx \to \frac{2}{3} = 0.667 \qquad \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{asin}(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \to \frac{1}{324}\cdot\pi^3 = 0.096$$

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx \to -2\cdot\exp(-1)+1 = 0.264 \qquad \int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx \to 4\cdot\ln(4)-4 = 1.545$$

$$\int_1^e \sin(\ln(x))dx \to \frac{1}{2}\cdot\exp(1)\cdot(\sin(1)-\cos(1))+\frac{1}{2} = 0.909$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \to 1 \qquad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx \to \frac{8}{3}$$

$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}dx \to \frac{1}{3}$ $\int_0^{\infty}e^{-a\cdot x}dx \to \lim_{x\to\infty^-}\frac{-1}{a}\cdot\exp(-a\cdot x)+\frac{1}{a}$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx \to \pi$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin(x)}{1+\cos(x)}dx \to \frac{1}{2}\cdot\pi$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos(x)}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2} \to \frac{1}{2}\cdot\exp(-1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt \to \frac{3}{\sqrt{1+x^{12}}}\cdot x^2-\frac{2}{\sqrt{1+x^8}}.$$

对于带参变量与带绝对值的定积分,MathCAD 与 MATLAB 的计算结果完全相同.例如

$\int_x^1\frac{1}{1+t^2}dt \to \frac{1}{4}\cdot\pi-\operatorname{atan}(x)$ $\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx \to \operatorname{atan}(b)-\operatorname{atan}(a)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(a\cdot x)dx \to 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\pi\right)}{a}$ $\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt \to \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\cdot\pi$

$$\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\,dx = 4$$

但无论是 MATLAB 还是 MathCAD,变上(下)限积分使用的积分变量都不能出现在积分的上(下)限中,否则将求不出结果.这一点与微积分中定积分与积分变量的写法无关是矛盾的,这可能是软件设计本身的漏洞,但不可凭此认为定积分与积分变量的写法有关.另外,细心的同学可能已经看到了在上述利用 MATLAB 求定积分时,有些式子用到了函数 eval( ),该函数是求表达式的实数值(非符号值),这是因为若不用该函数,MATLAB 在求定积分的过程中会用一些接近于无理数(如$\sqrt{2}$,e 等)的有理数来代替该无理数,结果看起来十分不便,如

```
int(1/(x*sqrt(1+log(x))),x,1,exp(2))
ans =2*(1+log(4159668786720471)-49*log(2))^(1/2)-2
eval(ans)            ans = 1.4641
int(sin(log(x)),x,1,exp(1))
ans =6121026514868073/4503599627370496*sin(log(6121026514868073))
      *cos(51*log(2))-6121026514868073/4503599627370496
      *cos(log(6121026514868073))*sin(51*log(2))-6121026514868073
      /4503599627370496*cos(log(6121026514868073))*cos(51*log(2))
      -6121026514868073/4503599627370496 *sin(log(6121026514868073))
      *sin(51*log(2))+1/2
```

```
eval(ans)              ans = 0.9093
```

可见，在利用数学软件求定积分时，往往会得到一些意料之外的结果，这时可将结果求值、化简或采取其它措施验算. 因为数学软件常会因软件的设置或在前面其它计算中变量已经赋过值等原因，而导致得出错误结论

第三节 微分方程

微分方程是自然科学和社会科学研究中非常重要且十分实用的一种数学学科. 本实验的目的是学会使用数学软件求解一般常见的常微分方程和微分方程组. 常微分方程有解析解法和数值解法两种. 解析解法是通过解表达式能让我们更清楚地理解解的性态，但其求解过程不规范而且十分复杂，因而只能对某些特殊类型的方程求解，对于多数方程则不易或不能求解；而数值解法的求解已有一些常用方法，如 Eular 法、Runge-Kutta 法等，它们能求出一般常微分方程在某一指定区间满足一定精度的数值解.

一、常微分方程的通解

当微分方程中不含任何附加条件(初值条件)时，其解就是该方程的通解，通解中任意常数的个数(一般要求独立)等于微分方程的阶数. 在 MathCAD 中没有求微分方程解析解的方法. 在 MATLAB 中，可用函数 dsolve( )求解一般微分方程，包括可分离变量微分方程、齐次方程、一阶、二阶、n 阶线性齐次和非齐次微分方程、可降阶的高阶微分方程等. 例如

```
syms x y z t a b
dsolve('Dy - x * Dy = a * (y^2 + Dy)','x')
ans = 1/(log( - 1 + x + a) * a + C1)
dsolve('sin(x) * cos(y) * Dy + cos(x) * sin(y) = 0','x')
ans = asin(exp(C1)/sin(x))
dsolve('2 * exp(x/y) * (1 - x/y) * Dy + (1 + 2 * exp(x/y)) = 0','x')
ans = - x/lambertw(2 * x/(x - C1))
dsolve('t * Dy + y = t^2 + 3 * t + 2')
ans = 1/6 * (2 * t^3 + 9 * t^2 + 12 * t + 6 * C1)/t
dsolve('D3y = exp(2 * x) - cos(x)','x')
ans = 1/8 * exp(2 * x) + sin(x) + C1 + C2 * x + C3 * x^2
dsolve('(1 + x^2) * D2y = 2 * x','x')
ans = - 2 * x + 2 * atan(x) + log(1 + x^2) * x + C1 + C2 * x
dsolve('y * D2y - (Dy)^2 = 0','x')
```