实验三　微积分实验

通过本实验,使同学们熟悉并掌握微积分的基本概念与基本运算:函数及其连续性、极限、导数与微分、不定积分与定积分、多元函数微积分、级数、以及微分方程的求解等.

第一节　函数、极限、导数与微分

一、初等函数及其性质

1. 五种基本初等函数的连续性

在 MATLAB 中建立以下程序文件,观察五种基本初等函数的图形,看是否能得出这样的结论:基本初等函数在其定义区间上是连续的.

```
x = linspace(-pi,pi,60);
z = linspace(0.1,2*pi,60);
t = linspace(-1,1,60);
u = linspace(-10,10,60);
y1 = x;y2 = x.^2;y3 = x.^3;y4 = x.^4;
subplot(3,2,1);
plot(x,y1,'-',x,y2,':',x,y3,'-.',x,y4,'--');
axis([-pi pi -2 5]);text(-0.5,4,'幂函数');
y1 = 2.^x;y2 = 10.^x;y3 = (1/2).^x;y4 = exp(x);
subplot(3,2,2);
plot(x,y1,'-',x,y2,':',x,y3,'-.',x,y4,'--');
axis([-pi pi 0 5]);text(-1.8,4,'指数函数');
y1 = log(z);y2 = log10(z);y3 = log2(z);y4 = log(z)./log(1/2);
subplot(3,2,3);
plot(z,y1,'-',z,y2,':',z,y3,'-.',z,y4,'--');
axis([0 pi -5 5]);text(1.5,4,'对数函数');
y1 = sin(x);y2 = cos(x);y3 = tan(x);y4 = cot(x);
subplot(3,2,4);
```

```
plot(x,y1,'-',x,y2,':',x,y3,'-.',x,y4,'--');
axis([-pi pi -5  5]);text(-1,4,'三角函数');
y1 = asin(t);y2 = acos(t);y3 = atan(u);y4 = acot(u);
subplot(3,2,5);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([-1 1 -pi pi]);text(0,-2,'反三角函数');
subplot(3,2,6);
plot(u,y3,'-.',u,y4,'--');
axis([-10 10 -pi/2 pi/2]);text(0.5, -1,'反三角函数');
```

执行该程序后显示如图 3-1 所示

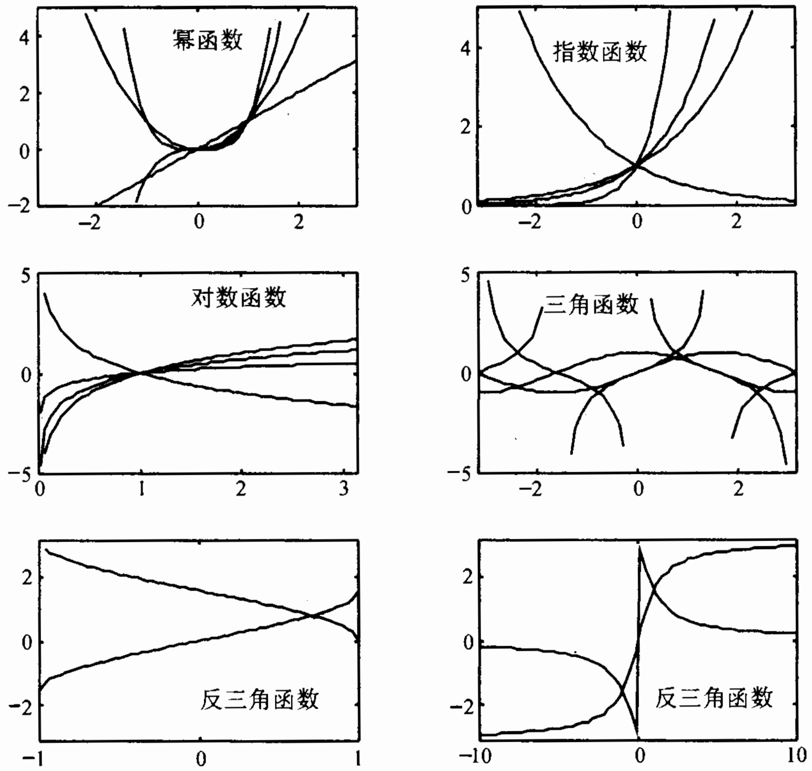

图 3-1　五种基本初等函数图

2. 初等函数的连续性

由五种基本初等函数进行有限次四则运算和有限次复合而成的函数称为初等函数.通过下述程序,观察下列函数

$$y=5x^4+2x^2+1,\qquad y=\sin x\ \exp(-x^2),$$

$$y=\frac{\cos x}{\cos 2x},\qquad y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$$

的图形(图 3－2),并讨论其定义域以及在定义区间上的连续性.

```
subplot(2,2,1);ezplot('5*x^4+2*x^2+1');xlabel'  ';
subplot(2,2,2);ezplot('sin(x)*exp(-x^2)');xlabel'  ';
subplot(2,2,3);ezplot('cos(x)/cos(2*x)');xlabel'  ';
subplot(2,2,4);ezplot('1+36*x/(x+3)^2');xlabel'  ';
```

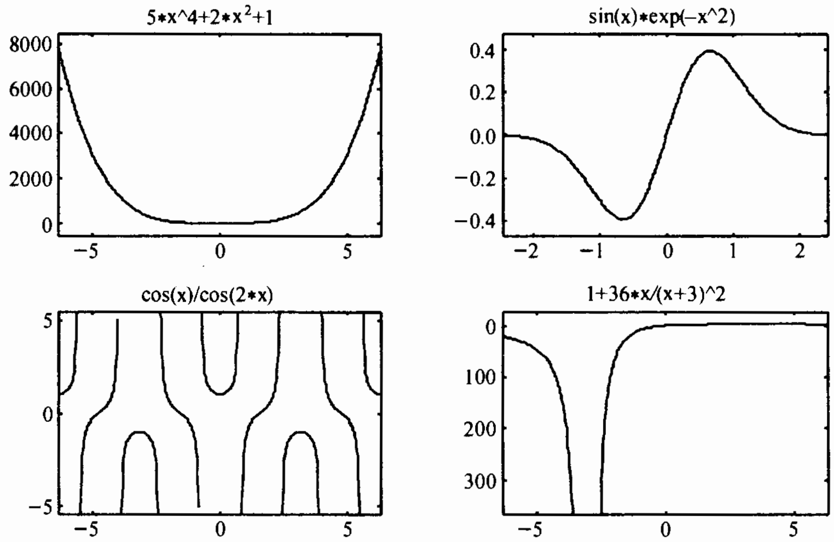

图 3－2　初等函数的连续性

由图可知,前两个函数在实数域内连续,后两个函数在定义区间内连续.可见,一切初等函数在其定义区间内连续.

3. 闭区间上连续函数的性质

观察函数 $f(x)=x^5-3x-1$ 在闭区间 $[1,2]$ 上的图形(图 3－3),并验证最值定理和介值定理,看其是否存在最大值和最小值,进一步验证零点定理,并用命令

```
x = fzero('x^5-3*x-1',1.5)
```

求得方程的根 $x=1.3888$.

思考: 如果将闭区间改为开区间或半开半闭区间,情况会怎样呢? 如果是闭区间上的不连续函数(有间断点),是否仍有这些性质? 举例并观察图形说明之.

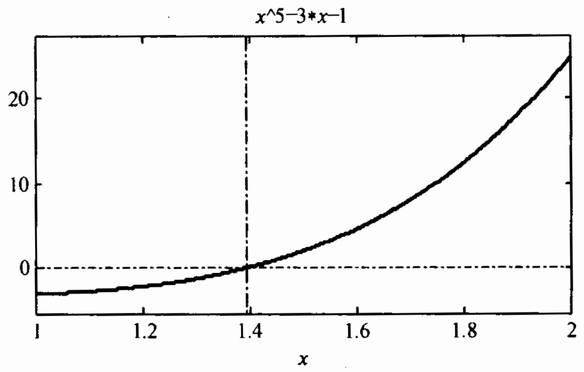

图 3 - 3　闭区间上连续函数的性质

二、函数的极限

极限在高等数学的发展史上有着举足轻重的作用.用数学软件的符号运算功能,可轻而易举地求出函数的极限.在 MATLAB 中,求极限的格式是

limit (表达式,变量,常量)

它表示“变量”趋于“常量”时“表达式”的极限;而格式

limit(表达式,常量)

则表示默认的变量趋于“常量”时“表达式”的极限;格式

limit(表达式)

表示默认变量趋于 0 时“表达式”的极限;格式

limit(表达式,变量,常量,'right' 或 'left')

则表示求“变量”趋于“常量”时“表达式”的右极限或左极限.例如

```
syms x a t h
limit(sin(x)/x)                          返回 ans = 1
limit((x-2)/(x^2-4),2)                   返回 ans = 1/4
limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf)             返回 ans = exp(6*t)
limit(1/x,x,0,'right')                   返回 ans = inf
limit(1/x,x,0,'left')                    返回 ans = -inf
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)           返回 ans = cos(x)
v=[(1+a/x)^x,exp(-x)];
limit(v,x,inf,'left')                    返回 ans = [ exp(a),     0]
limit((1+1/x)^x,x,inf)                   返回 ans = exp(1)
limit(((1+x)/x)^(2*x),x,inf)             返回 ans = exp(2)
```

```
limit((x^2*sin(1/x)/sin(x)),x,0)          返回 ans = 0
limit(x^sin(x),x,0,'right')               返回 ans = 1
limit((log(1+x^2)/(sec(x)-cos(x))),x,0)   返回 ans = 1
syms x a m n
limit(((x^m-a^m)/(x^n-a^n)),x,a)          返回 ans = a^m*m/(a^n)/n
simplify(ans)                             返回 ans = a^(m-n)*m/n
```

从上述几个例子看出,MATLAB 可以求出各种形式的极限,但其缺点是不够直观.而 MathCAD 比较好些,就上面几个例子,用 MathCAD 做出的结果如下

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\to 1 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}\to\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\to\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+2\frac{t}{x}\right)^{3x}\to\exp(6t)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\to-\infty \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\to\cos(x)$$

$$\lim_{x\to\infty^-}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}\to\exp(a) \qquad \lim_{x\to\infty^-}\exp(-x)\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\to\exp(1) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}\to\exp(2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\to 0 \qquad \lim_{x\to 0^+}x^{\sin(x)}\to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec(x)-\cos(x)}\to 1$$

可见 MathCAD 比 MATLAB 要直观的多,但 MathCAD 却不能求出极限

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}.$$

三、导数与微分

一元函数导数的定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

因而,一切求导数的问题,都可以用求极限的办法求得.利用数学软件中的符号运算功能,可以方便地求出各种函数的导数.在 MATLAB 中,函数求导运算可用函数 diff( ) 来完成,其一般格式为

```
diff(表达式,阶数)
```

它表示将“表达式”求“阶数”阶导数,若“阶数”省略,则表示求一阶导数.这里,表达式必须是符号表达式,若写成数字向量或矩阵,则表示求差分.求出的导数有

时候不是最简式子,MATLAB 中提供的 simplify 函数可用于化简符号表达式.从下面的例子中将会看到,由于 MATLAB 的执行结果很不直观,因而得到的结果,特别对高阶导数而言,显得有些繁乱,这时可用 pretty 命令规范化显示.

```
syms x
f = log(x);
diff(f)                    ans  = 1/x
diff(f,4)                  ans  = -6/x^4
g = (x + exp(x) * sin(x))^(1/2);
diff(g)                    ans = 1/2/(x + exp(x) * sin(x))^(1/2) * (1 +
                                exp(x) * sin(x) + exp(x) * cos(x))
pretty(ans)
```

$$1/2\,\frac{1\ +\exp(x)\ \sin(x)\ +\ \exp(x)\ \cos(x)}{(x+\exp(x)\ \sin(x))^{1/2}}$$

```
diff(g,2)
ans  = -1/4/(x + exp(x) * sin(x))^(3/2) * (1 + exp(x) * sin(x) + exp(x)
           * cos(x))^2  + 1/(x + exp(x) * sin(x))^(1/2) * exp(x) * cos(x)
simplify(ans)
ans  = 1/4 * ( -1 - 2 * exp(x) * sin(x)  - 2 * exp(x) * cos(x)  - exp(2 * x) +
      2 * exp(2 * x) * sin(x) * cos(x)  + 4 * exp(x) * cos(x) * x)/(x + exp(x)
       * sin(x))^(3/2)
pretty(ans)
```

$$1/4\ (-1-2\ \exp(x)\ \sin(x)\ -2\ \exp(x)\ \cos(x)\ -\exp(2\ x)$$
$$+\ 2\ \exp(2\ x)\ \sin(x)\ \cos(x)\ +\ 4\ \exp(x)\ \cos(x)\ x)/(x\ +\ \exp(x)\ \sin(x))^{3/2}$$

```
pretty(diff(g,2))
```

$$-1/4\,\frac{(1+\exp(x)\sin(x)+\exp(x)\cos(x))^2}{(x+\exp(x)\sin(x))^{3/2}}+\frac{\exp(x)\cos(x)}{(x+\exp(x)\sin(x))^{1/2}}$$

```
f1 = exp( -2 * x) * cos(3 * x^(1/2));
diff(f1,4)
ans  = 16 * exp( -2 * x) * cos(3 * x^(1/2)) + 48 * exp( -2 * x) * sin(3 * x^
      (1/2))/x^(1/2) - 54 * exp( -2 * x) * cos(3 * x^(1/2))/x - 9 * exp( -2 * x)
       * sin(3 * x^(1/2))/x^(3/2) - 351/16 * exp( -2 * x) * cos(3 * x^(1/2))/
      x^2 - 9/8 * exp( -2 * x) * sin(3 * x^(1/2))/x^(5/2)  - 135/16 * exp
      ( -2 * x) * cos(3 * x^(1/2))/x^3 + 45/16 * exp( -2 * x) * sin(3 * x^(1/2))/x^(7/2)
pretty(ans)
```

$$16\ \exp(-2\ x)\ \cos(3\ x^{1/2})+48\,\frac{\exp(-2\ x)\ \sin(3\ x^{1/2})}{x^{1/2}}-54\,\frac{\exp(-2\ x)\ \cos(3\ x^{1/2})}{x}$$

$$-9\,\frac{\exp(-2\,x)\,\sin(3\,x^{1/2})}{x^{3/2}}-\frac{351}{16}\frac{\exp(-2\,x)\,\cos(3\,x^{1/2})}{x^{2}}$$

$$-9/8\,\frac{\exp(-2\,x)\sin(3\,x^{1/2})}{x^{5/2}}-\frac{135}{16}\frac{\exp(-2\,x)\,\cos(3\,x^{1/2})}{x^{3}}$$

$$+\frac{45}{16}\frac{\exp(-2\,x)\,\sin(3\,x^{1/2})}{x^{7/2}}$$

由上述结果可以看出，MATLAB 的求导功能可以求出非常复杂函数的导数，而且求出的导数可用 pretty 命令将结果显示得更接近于习惯的表达式，但看起来还是不大习惯. 若用 MathCAD 求导，则结果看起来就自然多了. 同样，我们仍用上述几个函数求导，求导的阶数也相同，试比较两者的结果

$$\frac{d}{dx}\ln(x)\to\frac{1}{x}\qquad\qquad \frac{d^4}{dx^4}\ln(x)\to\frac{-6}{x^4}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+\exp(x)\cdot\sin(x)}\to\frac{1}{\left(2\cdot\sqrt{x+\exp(x)\cdot\sin(x)}\right)}\cdot(1+\exp(x)\cdot\sin(x)+\exp(x)\cdot\cos(x))$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x+\exp(x)\cdot\sin(x)}=$$

$$\frac{-1}{\left[4\cdot(x+\exp(x)\cdot\sin(x))^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]}\cdot(1+\exp(x)\cdot\sin(x)+\exp(x)\cdot\cos(x))^2$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x+\exp(x)\cdot\sin(x)}}\cdot\exp(x)\cdot\cos(x)$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\exp(-2\cdot x)\cdot\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)=$$

$$16\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)+48\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}-54\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x}$$

$$-54\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x}-9\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}-\frac{351}{16}\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^2}$$

$$-9\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}-\frac{351}{16}\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^2}-\frac{9}{8}\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

$$-\frac{135}{16}\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\cos\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^3}+\frac{45}{16}\cdot\exp(-2\cdot x)\cdot\frac{\sin\left(3\cdot\sqrt{x}\right)}{x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}$$

四、导数的应用

例 1　观察函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 及其一、二阶导数

$$y'=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},\qquad\qquad y''=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

的图象,观察函数的一、二阶导数的符号与函数的增减性、凹凸性和极值的关系.用命令

```
fplot('[(x-1)^3/(x+1)^2,(x-1)^2*(x+5)/(x+1)^3,
    24*(x-1)/(x+1)^4,0]',[-8,5,-40,20])
```

显示图形(图 3-4)

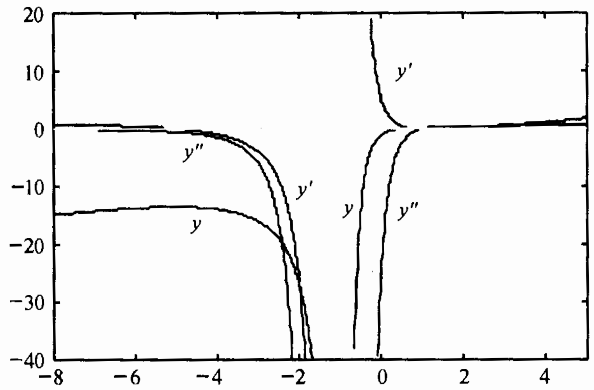

图 3-4　例 1 的函数及其一、二阶导数图

例 2　观察函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 及其一、二阶导数

$$y'=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\qquad y''=\frac{10}{9}(4x-1)x^{-\frac{1}{3}}$$

的图象,观察单调性、凹凸性和极值与一、二阶导数的关系.用命令

```
fplot ('[(x-1)*x^(5/3),8*x^(5/3)/3-5*x^(2/3)/3,
    10*(4*x-1)*x^(-1/3)/9,0]',[-2,2,-4,4])
```

显示图形(图 3-5)

例 3　观察函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 及其一、二阶导数

$$y'=12x^3-12x^2,\qquad y''=36x^2-24x$$

的图象,并讨论函数的凹凸性、单调性和极值.用命令

```
fplot('[3*x^4-4*x^3+1,12*x^2*(x-1),36*x*(x-2/3),0]',[-1,2,-8,8])
```

显示图形(图 3-6)

思考题:用函数及其一、二阶导数与极值的关系,编写一个求任意函数极值的程序,并求出上述三例函数的极值点.

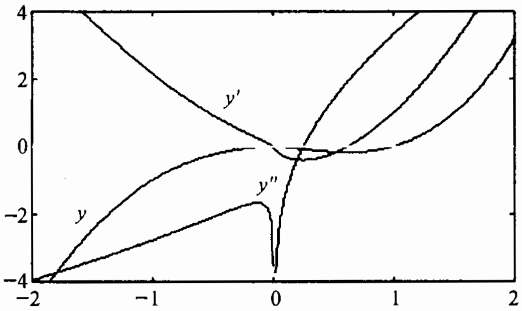

图 3-5　例 2 的函数及其一、二阶导数图

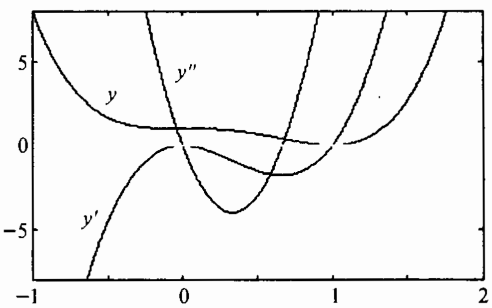

图 3-6　例 3 的函数及其一、二阶导数图

第二节　不定积分、定积分与反常积分

与导数和微分一样，积分是微积分的重要组成部分之一. 但相对于求导数来讲，求积分就难多了. 这是因为有相当多的函数在初等函数范围内是不可积的. 对于这类函数，我们虽然无法求出其不定积分，但却可以借助于数值方法求出其数值积分.

一、不定积分

不定积分是积分的最基本运算. 用手工计算不定积分时，一般用换元积分法和分部积分法，其步骤繁多且易出错，而用数学软件求不定积分则非常简单. 但由于目前人工智能水平的限制，并不是所有能用手工求出来的积分，都能用机器求出，而且对于不同的数学软件，所能求出的不定积分的范围也不相同. 在 MATLAB 中，求不定积分的命令为