目　录

引　言

高等代数的内容主要包括多项式理论初步和线性代数基础这两部分．

中华古国是线性代数的发祥地．《九章算术》第 8 章“方程”中的十八问全是解线性方程组的内容．在该章中所引入的负数概念以及正、负数加减法则在世界数学史上都是最早的记载，其中关于一次方程组的解法比西方同类解法要早 1500 年，但线性代数的崛起和完善却在 18 世纪～19 世纪的西欧．

高等代数的理论与方法在数学学科和其他自然科学、社会科学领域内都有广泛的应用．现代科学技术特别是电子计算机及计算科学的迅猛发展，为高等代数开辟了更广阔的应用前景．因此学习和掌握高等代数的理论和方法是必不可少的．

1　多 项 式

1.1　一元多项式运算及其基本性质

1.1.1　一元多项式概念

(1) 设 M 是一个数集，$a \in M, b \in M$. 如果 a 与 b 的和(或差、积、商)仍属于 M，则称加法(或减法、乘法、除法)在 M 中是可施行的，也称这运算对 M 是封闭的．

(2) 在非空数集 P 中，如果加法、减法、乘法是封闭的，则称 P 为一个数环．

(3) 如果 F 是至少有两个数的数环，且 F 对除法(零不作除数)是封闭的，则 F 叫数域．

(4) 设 x 是一个文字，n 是非负整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是数域 F 中的数，则其形式表达式

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1-1}$$

称为数域 F 上的**一元多项式**，常表示为 $f(x), g(x), \cdots$.

在多项式(1-1)中，a_0 叫做零次项或常数项，a_ix^i 叫做 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数．满足条件 $a_n \neq 0$ 的最大整数 n 叫做该多项式的次数，记为次$(f(x)) = n$，a_n 称为它的首项系数．当 $a_n = 1$ 时，称该多项式为首一多项式．

除 $a_0 \neq 0$ 外，其他 a_i 都是零的多项式称为零次多项式．此外，如果多项式(1-1)中各项系数均为零，就称其为零多项式，记为 $0(x)$. 多项式 $0(x)$ 的“次数”没有意义，它是唯一没有次数的多项式．这里零多项式与零次多项式的含义是不同的．

1.1.2 一元多项式的运算及其基本性质

(1) 如果多项式$f(x)$与$g(x)$的同次项的系数分别相同,则称$f(x)$与$g(x)$相等,记为$f(x)=g(x)$.

(2) 数域F上的两个多项式的和、差、积仍然是数域F上的多项式.记数域F上全体一元多项式组成的集合为$F[x]$,于是$F[x]$关于多项式加法、减法及乘法封闭,因而$F[x]$为数域F上的一元多项式环.

(3) 次数公式

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(次(f(x)),次(g(x)));$$
$$次(f(x)g(x))=次(f(x))+次(g(x)).$$

(4) 多项式加法及乘法运算与数的运算类似,满足通常的算律.

1.2 多项式的整除理论

1.2.1 多项式整除的概念

设$f(x),g(x)\in F[x]$.若存在$h(x)\in F[x]$,且满足$f(x)=g(x)h(x)$,则称$g(x)$整除$f(x)$,或称$g(x)$是$f(x)$的因式,记为$g(x)\mid f(x)$.若此$h(x)$不存在,就称$g(x)$不整除$f(x)$,记为$g(x)\nmid f(x)$.

1.2.2 整除的性质

(1) 零次多项式(即非零常数)整除一切多项式;

(2) 任意多项式整除$0(x)$,特别地,$0(x)$整除$0(x)$;

(3) 若$h(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$,则$h(x)\mid f(x)$(整除的传递性);

(4) 若$f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中$c$为非零常数;

(5) $c\cdot f(x)\mid f(x)$,其中c为非零常数;

(6) 若$g(x)\mid f_1(x),g(x)\mid f_2(x)$,则$g(x)\mid[u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)]$,其中$u_1(x)$与$u_2(x)$是任意多项式;

(7) 若$g(x)\mid f(x)$,则次$(f(x))\geqslant$次$(g(x))$;

(8) 若$p(x)$为一不可约多项式,且$p(x)\mid f(x)g(x)$,则$p(x)\mid f(x)$或$p(x)\mid g(x)$.

例1 设$h(x)\mid[3f(x)+2g(x)],h(x)\mid[2f(x)-3g(x)]$.试证:$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$.

证 由$h(x)\mid[3f(x)+2g(x)],h(x)\mid[2f(x)-3g(x)]$,有

$$3f(x)+2g(x)=h(x)p(x),$$
$$2f(x)-3g(x)=h(x)q(x).$$

由上两等式,得到

$$f(x)=h(x)\left[\left(\frac{3}{13}\right)p(x)+\left(\frac{2}{13}\right)q(x)\right],$$

$$g(x)=h(x)\left[\left(\frac{2}{13}\right)p(x)-\left(\frac{3}{13}\right)q(x)\right],$$

故

$$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x).$$

1.2.3 带余除法

带余除法定理 对于数域F上的任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$,其中$g(x)\neq 0(x)$,总有数域F上的多项式$q(x)$和$r(x)$,满足

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),\tag{1-2}$$

其中$r(x)$或者是$0(x)$,或者比$g(x)$次数低,这里$r(x)$称为余式,$q(x)$称为商式,而且这样的$q(x)$和$r(x)$是唯一的.

下面举例给出求商式$q(x)$和余式$r(x)$的方法,这种除法称为**带余除法**.

例2 设$f(x)=2x^4-3x^2+2x-6,g(x)=x^2+2x-1$.求$g(x)$除$f(x)$所得商式$q(x)$及余式$r(x)$.

解 因为

$$\begin{array}{r|r|l}
(g(x)) & (f(x)) & (q(x)) \\
x^2+2x-1 & 2x^4\qquad\quad -3x^2+2x-6 & 2x^2-4x+7 \\
 & 2x^4+4x^3-2x^2\qquad\qquad & \\
\hline
 & -4x^3-x^2+2x-6 & (f_1(x)) \\
 & -4x^3-8x^2+4x\quad & \\
\hline
 & 7x^2-2x-6 & (f_2(x)) \\
 & 7x^2+14x-7 & \\
\hline
 & -16x+1 & (r(x))
\end{array}$$

$$f_1(x)=f(x)-g(x)\cdot 2x^2,$$
$$f_2(x)=f_1(x)-g(x)\cdot(-4x),$$
$$r(x)=f_2(x)-g(x)\cdot 7,$$

所以

$$f(x)=g(x)(2x^2-4x+7)+(-16x+1),$$

从而得到

$$商式\quad q(x)=2x^2-4x+7,$$
$$余式\quad r(x)=-16x+1.$$

1.2.4 余数定理与综合除法

(1) 余数定理 设$c\in F$为一常数,则多项式$f(x)\in F[x]$除以$x-c$所得的余数等于$f(c)$.

(2) 综合除法 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.$f(x)$除以$x-c$的商式与余数的计算格式如下:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & + & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n
\end{array}
$$

式中 $b_0 = a_0, b_i = a_i + cb_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n)$. 于是得到

商式 $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$,

余式 $r = b_n = f(c)$.

利用上述计算格式求得商式 $q(x)$ 和余式(余数) r 的方法称为**多项式的综合除法**. 该法将除式为 $x - c$ 的带余除法大大地简化了. 用此法很容易判断一次多项式 $x - c$ 是否整除多项式 $f(x)$.

例3 判断 $x + 3$ 能否整除 $x^5 + 22x^2 + 40$.

解 用综合除法求出 $x+3$ 除 $f(x)$ 的余数,看余数是否为0. 为此将所给多项式的系数按降幂排列,缺项补0,于是有

$$
\begin{array}{c|cccccc}
-3 & 1 & 0 & 0 & 22 & 0 & 40 \\
 & + & -3 & 9 & -27 & 15 & -45 \\
\hline
 & 1 & -3 & 9 & -5 & 15 & -5
\end{array}
$$

这表明

$$q(x) = x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 5x + 15,$$
$$r = -5 \neq 0.$$

即

$$x^5 + 22x^2 + 40 = (x + 3) \cdot (x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 5x + 15) - 5.$$

因此

$$(x + 3) \nmid x^5 + 22x^2 + 40.$$

1.2.5 两个多项式的最大公因式

(1) 设 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式. 如果对于 $f(x), g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$ 都有 $h(x) \mid d(x)$,那么称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$,且不全为 $0(x)$,则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式一定存在,且除一个非零常数外,是唯一的.

显然,不全为 $0(x)$ 的 $f(x), g(x)$ 的最大公因式中首项系数为1的只有一个. 这个最高公因式用符号 $(f(x), g(x))$ 表示.

(3) 最大公因式的求法 采用**多项式的辗转相除法**.

(4) 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式 $d(x)$ 为最大公因式的充要条件是存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$,满足

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

例4 设 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. 试求 $(f(x), g(x))$ 及 $u(x)$ 和 $v(x)$,使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

解 用辗转相除法求之.

$(q_1(x))$	$(f(x))$	$(g(x))$	$(q_2(x))$
$x + 1$	$x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$	$x^3 + x^2 - x - 1$	$x - 2$
	$x^4 + x^3 - x^2 - x$	$x^3 + 3x^2 + 2x$	
	$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	$-2x^2 - 3x - 1$	
	$x^3 + x^2 - x - 1$	$-2x^2 - 6x - 4$	
$(q_3(x))$	$(r_1(x))$ $x^2 + 3x + 2$	$(r_2(x))$ $3x + 3$	
$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$	$x^2 + x$		
	$2x + 2$		
	$2x + 2$		
	0		

不难得到下列算式:

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

即

$$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x).$$
$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$

即

$$r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x).$$
$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x),$$

即

$$d(x) = (f(x), g(x)) = r_2(x).$$

因而有

$$
\begin{aligned}
3x + 3 = d(x) = r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) \\
&= g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] \\
&= [-q_2(x)]f(x) + [1 + q_1(x)q_2(x)]g(x),
\end{aligned}
$$

则

$$u(x) = -q_2(x) = -x + 2;$$
$$v(x) = 1 + q_1(x)q_2(x) = 1 + (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 1,$$

使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

(5) **多项式互素** 如果 $f(x), g(x) \in F[x]$,而 $(f(x), g(x)) = 1$,则称 $f(x)$, $g(x)$ 互素.

例5 设 $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 7, g(x) = x + 2$. 证明

$$(f(x), g(x)) = 1.$$

证 由于 $g(x) = x + 2$ 是一次多项式,若 $(f(x), g(x)) \neq 1$,则 $(f(x), g(x)) = g(x)$,因而必有 $g(x) \mid f(x)$,但由综合除法有

-2	5	0	-3	2	-7
		-10	20	-34	64
	5	-10	17	-32	57

这表明 $g(x)\nmid f(x)$,因而 $(f(x),g(x))$ 不能是一次多项式,于是有 $(f(x),g(x))=1$.

(6) $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x)$ 与 $v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

1.2.6 多个多项式的最大公因式

(1) 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$ 是数域 F 上的多项式.若有 $d(x)\in F[x]$ 满足

1° $d(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s$;

2° $d(x)$ 是各 $f_i(x)$ 公因式的倍式,即若 $h(x)\in F[x],h(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s$,则 $h(x)\mid d(x)$,那么就称 $d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的最大公因式.

(2) $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的最大公因式一定存在,且除一个非零常数因子外,是唯一的.设

$$d(x)=((\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),\cdots),f_s(x)),$$

则 $d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的最大公因式.

(3) 假设 $d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的公因式,则

$$d(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$$

的充要条件是存在 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$ 满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=d(x).$$

(4) 在多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$ 中,若任意两个多项式 $f_i(x)$,$f_j(x)$ 均互素,即 $(f_i(x),f_j(x))=1(i,j=1,2,\cdots,s;i\neq j)$,则称这些多项式两两互素.

(5) 若多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$ 的最大公因式为零次多项式,即 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=1$,则称这些多项式整体互素.

显然,两两互素一定保证整体互素;反之,整体互素却不一定两两互素.例如,

$$f_1(x)=x^2-1,$$
$$f_2(x)=(x+1)^2,$$
$$f_3(x)=(x-1)^2$$

整体互素,但不两两互素,因为

$$(f_1(x),f_3(x))=x-1.$$

(6) 多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 整体互素的充要条件是存在 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$,满足

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=1.$$

1.3 一元多项式的因式分解

1.3.1 因式分解定理

(1) 不可约多项式概念 设 $f(x)$ 为 $F[x]$ 中次数大于零的一个多项式,若在 $F[x]$ 中 $f(x)$ 只有平凡因式,则 $f(x)$ 称为 $F[x]$ 中的**不可约多项式**.也说 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中不可约,或说 $f(x)$ 在 F 上不可约.如果 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中有非平凡因式,则称 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中可约多项式.

(2) **多项式的因式分解定理** 数域 F 上高于零次的多项式,可以分解成 F 上不可约多项式的乘积,除次序和非零常数因子外,分解是唯一的.

1.3.2 重因式

(1) **多项式的重因式**.若 $p^k(x)\mid f(x),p^{k+1}(x)\nmid f(x),k\geqslant 1$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

(2) 若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的不可约多项式,则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式的充要条件为 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

(3) $f(x)$ 无重因式当且仅当 $(f(x),f'(x))=1$.

(4) 设 $(f(x),f'(x))=d(x)\neq 0(x)$,则多项式 $F(x)=f(x)/d(x)$ 无重因式,且和 $f(x)$ 有相同的不可约因式(不计重数).

例 6 判断多项式 $f(x)=2x^3+5x^2+4x+1$ 有无重因式.

解 只须判断 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 是否互素.因为

$$f'(x)=6x^2+10x+4,$$

经辗转相除,得 $(f(x),f'(x))=x+1$,$f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素,$f(x)$ 有重因式,重因式为 $x+1$.

1.4 复数域、实数域和有理数域上的多项式

1.4.1 复数域 **C** 上的多项式

(1) 每个 $n(n\geqslant 1)$ 次复系数多项式都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

(2) 每个 $n(n\geqslant 1)$ 次复系数多项式在复数域中恰好有 n 个根(k 重根按 k 个计算).

1.4.2 实数域 **R** 上的多项式

(1) 设 $f(x)$ 为实数域 **R** 上的多项式.若有非常数的实系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$,使 $f(x)=g(x)h(x)$,则称 $f(x)$ 在实数域上可约.否则称 $f(x)$ 为实数域上的不可约多项式.

(2) 实数域上不可约多项式,除一次多项式外,只有含(共轭)复根的二次多项

式．

(3) 每个实系数多项式都可以唯一分解成一次与二次不可约因式的乘积．

(4) 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，那么 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，且根的重数相同，因而，复根的个数是偶数．

1.4.3　有理数域 Q 上的多项式

(1) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能够分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积．

因此有理系数多项式的因式分解就完全归结为整系数多项式的因式分解．

(2) 设整系数多项式为

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

如果 $f(x)$ 有一个有理根 r/s，其中 r,s 是互素的整数，那么 r 一定是 a_0 的因数，s 一定是 a_n 的因数．特别，如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n = 1$，那么它的有理根都是整数根，而且是 a_0 的因数．

(3) **艾森斯坦(Eisenstein)判别法**　设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0(a_n \neq 0)$ 是一个整系数多项式．若有一个素数 p，满足以下 3 个条件：

1° p 不整除首项系数 a_n；

2° p 整除其他各项的系数 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$；

3° p^2 不整除常数项 a_0．

那么，$f(x)$ 在有理数域上不可约．

例7　对任意素数 p，任意正整数 n，证明 $x^n + p$ 是有理数域上不可约多项式．

证　p 是满足艾森斯坦判别法诸条件的素数，故 $x^n + p$ 是有理数域上不可约多项式．

(4) 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式(见上例)，且应用艾森斯坦判别法可以作出许多不可约的有理系数多项式．

1.5　多元多项式

1.5.1　多元多项式的概念

设常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 属于数域 F，$\alpha_i, \beta_i, \cdots, \nu_i (i = 1,2,\cdots,k)$ 是正整数或零，则称形如

$$c_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}\cdots x_n^{\nu_1} + c_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\nu_2} + \cdots + c_kx_1^{\alpha_k}x_2^{\beta_k}\cdots x_n^{\nu_k}$$

的表达式为数域 F 上元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元多项式．$c_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i}\cdots x_n^{\nu_i}$ 称为它的项，c_i 为它的系数，α_i 为项中关于 x_1 的次数，β_i 为项中关于 x_2 的次数，等等．$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \nu_i$ 为项的次数．在多项式中系数不为零的任一项关于 x_i 的最高次数称为多项式关于 x_i 的次数，系数不为零的任一项的最高次数叫做多项式的次数，各项次数都相等的多项式称为齐次多项式．

每个 m 次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可唯一地表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

式中 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 i 次齐次多项式．

为了方便，经常把一个多元多项式按某一个变数，例如，x_1 的降幂排列如下：

$$a_0(x_2, \cdots, x_n)x_1^m + a_1(x_2, \cdots, x_n)x_1^{m-1} + \cdots + a_m(x_2, \cdots, x_n),$$

式中 $a_0(x_2, \cdots, x_n), a_1(x_2, \cdots, x_n), \cdots, a_m(x_2, \cdots, x_n)$ 为 $x_2, \cdots, x_n$ 的 $n-1$ 元多项式．

若 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 次的多元多项式，则乘积 $f_1f_2\cdots f_k$ 为 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 次．

1.5.2　对称多项式

(1) 交换任意两个变量，多项式保持不变的 n 元多项式，称为**对称多项式**．

(2) 令 $\sigma_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 是所有可能的 k 个不同的 x_i 的乘积之和，即

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_ix_j,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n,$$

则 σ_k 都是 n 元 k 次齐次多项式．显然 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式．这 n 个对称多项式称为初等对称多项式．

(3) 数域 F 上的每个 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可唯一地表示为 n 元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式(系数都在 F 上)的多项式．

(4) 牛顿公式

设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$
$$= x^n - \sigma_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n,$$
$$s_k = x_1^{\,k} + x_2^{\,k} + \cdots + x_n^{\,k} \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

则下面牛顿公式成立：

$k \leqslant n$ 时，$s_k - \sigma_1s_{k-1} + \sigma_2s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^kk\sigma_k = 0$，

$k > n$ 时，$s_k - \sigma_1s_{k-1} + \sigma_2s_{k-2} + \cdots + (-1)^n\sigma_ns_{k-n} = 0$.

1.5.3　结式

(1) 定义　设数域 F 上两非零多项式为

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n (n > 0),$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m (m > 0),$$

则

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{ 行}\end{matrix}$$

此 $m+n$ 阶行列式称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**结式**,式中空白处的元素都为零.

(2) 结式性质　设 $f(x),g(x)$ 为复数域上的多项式,首项系数分别为 a_0 与 b_0,其根分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$,则

1° $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$;

2° $R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$;

3° $R(f,g)=a_0^m\prod\limits_{i=1}^{n}g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^n\prod\limits_{j=1}^{m}f(\beta_j)$;

4° 设 a_0,b_0 不全为零,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域 **C** 上有公共根的充分必要条件是其结式 $R(f,g)=0$;

5° 行列式 $R(f,g)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的系数的 $m+n$ 次齐次多项式,且关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 m 次齐次多项式,关于 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 是 n 次齐次多项式.

例 8　求多项式 $f(x)=x^n+x+1$ 与 $g(x)=x^2-3x+2$ 的结式 $R(f,g)$.

解　$g(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 有两个根,即

$$\beta_1=1,\beta_2=2.$$

又 $b_0=1,m=2$,故

$$\begin{aligned}R(f,g)&=(-1)^{2\cdot n}1^n\prod_{j=1}^{2}f(\beta_j)\\&=f(\beta_1)f(\beta_2)=f(1)f(2)\\&=(1^n+1+1)(2^n+2+1)\\&=3(2^n+3).\end{aligned}$$

例 9　判断多项式 $f(x)=x^2+3x+2$ 与 $g(x)=x^2-2x+1$ 在复数域上有无公根.

解　只须判定 $R(f,g)$ 是否为零.设 α_1,α_2 为 $f(x)$ 的根,则

$$\begin{aligned}R(f,g)&=g(\alpha_1)g(\alpha_2)\\&=(\alpha_1^2-2\alpha_1+1)(\alpha_2^2-2\alpha_2+1)\\&=\alpha_1^2\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2+\alpha_2^2-2(\alpha_1+\alpha_2)+1.\end{aligned}$$

由韦达定理,有

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2=-3,\\&\alpha_1\alpha_2=2,\\&\alpha_1^2+\alpha_2^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-2\alpha_1\alpha_2=5,\end{aligned}$$

故

$$R(f,g)=4+12+8+5+6+1=36\neq 0.$$

因而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无公根.

2 行 列 式

2.1 行列式的定义和性质

2.1.1 行列式的定义

行列式的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

式中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是该排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数;$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

2.1.2 行列式的基本性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,因而对于行列式的行成立的定理,对列也成立.

(2) 互换行列式的两行(列),其值变号.

(3) 用数 k 乘行列式的某行(列),等于用该数乘此行列式.

(4) 将某行(列)的倍数加到另一行(列),行列式的值不变.

(5) 若行列式中有两行(列)成比例,行列式等于零.

(6) 若行列式中某一行(列)是两组数的和,则行列式可以写成两个行列式的和,此二行列式的这一行(列)分别是第一组数与第二组数,而其它各行(列)都与原行列式相同.

2.1.3 几种特殊行列式

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(2) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

(4) 循环行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(e_1)f(e_2)\cdots f(e_n),$$

这里，$f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 1 的全部 n 次方根，即 $e_i^n = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

2.2　行列式的展开

2.2.1　行列式按行(列)展开

(1) 子式　在 $n(n>1)$ 阶行列式 D 中，任意取定 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行，k 列．位于这些行列交叉处的元素，按在 D 中的相对位置排成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式．

(2) 余子式　在 n 阶行列式 D 中，$k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 阶子式 M 的余子式 N 是 D 的一个 $n-k$ 阶子式，它是 D 中划去 M 所在的行与列后，所剩下的 $n-k$ 阶子式．

(3) 代数余子式　n 阶行列式 D 的 k 阶子式 M 的余子式 N，若带上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k)}$，则称为 M 的**代数余子式**，记作 A，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为 M 的元素所在 D 中的行数，$j_1, j_2, \cdots, j_k$ 为 M 的元素所在 D 中的列数．

当 $k=1$ 时，1 阶子式就是 D 中一个元素 a_{ij}. a_{ij} 的余子式记作 M_{ij}，a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(4) 行列式按行(列)展开规则

1° n 阶$(n>1)$行列式 D 等于它的任意一行(列)元素与它们对应的代数余子式之积的和．

2° n 阶$(n>1)$行列式 D 的某行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积的和等于 0.

1° 和 2° 可表示为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} D, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

2.2.2　行列式按某 k 行(列)展开(拉普拉斯展开定理)

在 n 阶$(n>1)$行列式 D 中取定某 k 个$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$行(列)，那么在这 k 个行(列)中所有 k 阶子式分别与它们各自的代数余子式乘积的和等于 D.

2.2.3　行列式的乘法定理

两个 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 与 \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

2.3　克莱默法则

克莱默(Cramer)法则如下：

1° 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2-1}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，那么线性方程组(2-1)有解，且解是唯一的，解可以通过系数表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

式中 D_i 是把 D 的第 i 列元素 $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ 分别换成常数项列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式．

2° 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，那么它只有零解．换言之，如果方程组(2-2)有非零解，那么必有 $D = 0$.

例1　已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq 0$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量都是下列方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解向量，试求 λ 的值．

解　因 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个非零列向量．依题意，所给齐次线性方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式必等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

为使 D 中第2,3两列成比例，$\lambda = 1$ 即可．

3　线性方程组

含 n 个未知量，m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3-1}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，称为非齐次线性方程组；当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，称为齐次线性方程组．记

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{系数矩阵}).$$

$$\boldsymbol{X} = [x_1 \ x_2 \cdots \ x_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b} = [b_1 \ b_2 \cdots \ b_m]^{\mathrm{T}},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] \quad (\text{增广矩阵}),$$

式中T表示转置，那么线性方程组(3-1)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}; \tag{3-2}$$

对应的齐次线性方程组可写成

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}. \tag{3-3}$$

3.1　线性方程组解的判定

3.1.1　非齐次线性方程组解的判定

(1) 非齐次线性方程组(3-2)有解的充要条件是秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(2) 非齐次线性方程组(3-2)解的个数：

1° 当秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$ 时，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 只有一解；

2° 当秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\overline{\boldsymbol{A}}) = r < n$ 时，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多个解．

3.1.2　齐次线性方程组解的情况

(1) 齐次线性方程组(3-3)总有解，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是该方程组的解，称为零解．

(2) 当秩$(\boldsymbol{A}) = n$ 时，齐次线性方程组(3-3)只有一个零解．

(3) 当秩$(\boldsymbol{A}) = r < n$ 时，齐次线性方程组(3-3)除零解外，还有无穷多个非零解．

3.2 线性方程组的解向量之间的关系

3.2.1 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量之间的关系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

的解向量,则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

的解向量,其中 k_1,k_2 为任意常数.

3.2.2 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解向量之间的关系

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$$

的 s 个解向量,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为 s 个实数,且

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=1,$$

则 $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量.

3.2.3 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解向量之间的关系

(1) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量,则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

(2) 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量.

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解向量,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解向量.

(4) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解向量,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解向量.

3.3 线性方程组解的结构

3.3.1 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的结构

当秩$(\boldsymbol{A})=r<n$ 时,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 都是它的一个**基础解系**,则**齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解**(一般解)可表示为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

3.3.2 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构

当秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时,若 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解(已知解向量),$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一基础解系,则**非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解**(一

般解)可表示为

$$\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

例1 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3.已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的3个解向量,其中 $\boldsymbol{\eta}_1=[2\ 3\ 4\ 5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[1\ 2\ 3\ 4]^{\mathrm{T}}$.求其通解.

解 设该方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,其一特解为 $\boldsymbol{\eta}_1$,先求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.因秩$(\boldsymbol{A})=3,n=4$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系含1个解向量.由解向量的关系知,$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.从而

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=[3\ 4\ 5\ 6]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$$

为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,且为一基础解系,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.于是所求的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_1+k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\eta}_1+k[3\ 4\ 5\ 6]^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

3.4 基础解系和特解的简便求法

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{b}$ 分别为 n,m 维列向量.对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$ 施行初等行变换,将 $\boldsymbol{A}$ 化成含最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_r$(r 阶单位矩阵)的矩阵.为方便计,设 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 经初等行变换化为

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1=[\boldsymbol{A}_1\ \vdots\ \boldsymbol{b}_1]=\left[\begin{array}{cccccccc:c}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}&d_r\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{array}\right],\tag{3-4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为最右端矩阵中虚线左边矩阵,$\boldsymbol{b}_1$ 为虚线右边列向量.

3.4.1 基础解系的简便求法

令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.由(3-4)式知,秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=r$,而未知量个数为 n,故其一个基础解系含 $n-r$ 个解向量.设其为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$,可按下法根据变换矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 进一步写出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的各个分量.

因最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_r$ 的 r 个列分别位于 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 列,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量依次是 $\boldsymbol{E}_r$ 所在列以外的 $n-r$ 个列,即第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 列的前 r 个分量反号.于是可先写出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=[-c_{1,r+1}\ -c_{2,r+1}\cdots -c_{r,r+1}\ *\ *\ \cdots\ *];\\\boldsymbol{\alpha}_2&=[-c_{1,r+2}\ -c_{2,r+2}\cdots -c_{r,r+2}\ *\ *\ \cdots\ *];\\&\ \ \vdots\\\boldsymbol{\alpha}_{n-r}&=[-c_{1n}\ -c_{2n}\cdots\ c_{rn}\ *\ *\ \cdots\ *].\end{aligned}$$

而其余 $n-r$ 个分量依次取成 $n-r$ 阶单位矩阵,于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [-c_{1,r+1}\ -c_{2,r+1}\cdots\ -c_{n,r+1}\ 1\ 0\ \cdots\ 0];$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2 = [-c_{1,r+2}\ -c_{2,r+2}\cdots\ -c_{n,r+2}\ 0\ 1\ \cdots\ 0];$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{n-r} = [-c_{1n}\ -c_{2n}\cdots\ -c_{nn}\ 0\ 0\ \cdots\ 1].$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则基础解系包含的 $n-r$ 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的第 j_1,第 $j_2,\cdots$,第 j_r 个分量依次是除 r 阶单位矩阵所在 r 个列向量以外的其余 $n-r$ 列的前 r 个分量反号,而其余 $n-r$ 个分量依次取成 $n-r$ 阶单位矩阵.

例 2　求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$$

解　将其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化成含最高阶单位矩阵的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$,即

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}_1$ 中最高阶单位矩阵为 $\boldsymbol{E}_3$,故秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}_1)=r=3$,而 $n=5$,一个基础解系含 $n-r=5-3=2$ 个解向量.

因 $\boldsymbol{E}_r$ 位于 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 $j_1=1$、$j_3=3$、$j_4=4$ 列,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的第 1、3、4 个分量分别为 $\boldsymbol{A}_1$ 的其余 2 列,即第 2、5 两列的前 3 个分量反号,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的其余两分量依次组成 2 阶单位矩阵,故 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1\ 1\ 0\ 0\ 0]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1\ 0\ -1\ 0\ 1]$ 为所求的一个基础解系.

3.4.2　特解的简便求法

在(3-4)式中,因最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_r$ 在 $\boldsymbol{A}_1$ 即 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 列,故特解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量等于 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取成零,于是

$$\boldsymbol{\eta}_0=[d_1\ d_2\cdots\ d_r\ 0\ 0\ \cdots\ 0].$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则 $\boldsymbol{\eta}_0$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 个分量依次等于 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取成零.

例 3　求下列方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=1. \end{cases}$$

解　对其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换,化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1=[\boldsymbol{A}_1\ \vdots\ \boldsymbol{b}_1]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&1&\frac{4}{3}\end{array}\right].$$

注意到最高阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}_2$ 在 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 的第 1、4 两列,特解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 的第 1、4 两个分量依次等于 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 中最后一列的两分量 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{3}$,其余分量为零.于是

$$\boldsymbol{\eta}_0=[-\tfrac{1}{3}\ 0\ 0\ \tfrac{4}{3}].$$

对应的齐次线性方程组的基础解系由其简便求法即得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[2\ 1\ 0\ -1]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=[-\tfrac{1}{3}\ 0\ 1\ -\tfrac{2}{3}]^{\mathrm{T}},$$

故所求通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\quad(k_1,k_2\ \text{为任意常数}).$$

例 4　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. \end{cases}$$

1° a,b 为何值时,方程组有解?

2° 方程组有解时,求出方程组导出组的一个基础解系.

3° 方程组有解时,求出方程组的全部解.

解　用初等行变换化增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{bmatrix}=\overline{\boldsymbol{A}}_1.$$

由 $b-3a=0,2-2a=0$ 得到 $a=1,b=3$,故当 $a=1,b=3$ 时方程组有解.将 $a=1,b=3$ 代入 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 得到

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\overline{\boldsymbol{A}}_1.$$

由 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 即得导出组的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 及原方程组的一特解 $\boldsymbol{\eta}_0$:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1\ -2\ 1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=[1\ -2\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=[5\ -6\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\eta}_0=[-2\ 3\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}},$$

故其全部解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\eta}_0(k_1,k_2,k_3\ \text{为任意常数}).$$

4　线 性 空 间

4.1　线性空间的概念

4.1.1　线性运算

设 F 是一个数域,其元素用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示,V 是任一种类对象的非空集合,其元素用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示.在 V 上确定两个运算法则:

1° V 中元素的加法　在 V 中,任意两元 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,总有唯一确定的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与其对应,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之和,记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

2° F 中的数与 V 中元素的乘法(称为数乘)　对 F 中任一数 a 与 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$,在 V 中总有唯一确定的元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应,称为 a 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘,记作 $\boldsymbol{\delta}=a\boldsymbol{\alpha}$.

这两个运算法则称为线性运算.

4.1.2　线性空间的定义及性质

(1) 线性空间的定义　设 F 是一数域,V 是任一类对象的非空集合,若对线性运算满足以下条件,则称 V 为数域 F 上的**线性空间**:

1° $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

2° $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

3° V 中存在元素 $\mathbf{0}$,对 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}.$$

具有这个性质的元素 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素.

4° 对 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,V 中存在元素 $\boldsymbol{\alpha}'$,使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{0}$,称 $\boldsymbol{\alpha}'$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素.

数乘法满足下面两条规则:

5° $(ab)\boldsymbol{\alpha}=a(b\boldsymbol{\alpha})$.

6° $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

数乘法与加法满足下面两条规则

7° $a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=a\boldsymbol{\alpha}+a\boldsymbol{\beta}$.

8° $(a+b)\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\alpha}$.

这里 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 V 中任意元素,a,b 是 F 中任意数.

线性空间 V 中元素有时也称为向量,因而线性空间也称向量空间.F 中的数称为纯量.

例如:

1° 当 $F=\mathbf{R}$ 时,V 为实数域上的线性空间,简称为实(线性)空间.

2° 当 $F=\mathbf{C}$ 时,V 为复数域上的线性空间,简称为复(线性)空间.

再例如:

1° 数域 F 上所有 n 维向量按 n 维向量加法,以及数与 n 维向量的乘法构成线性空间 F^n.

2° 数域 F 上所有一元多项式,按通常的多项式加法,以及数与多项式的乘法组成数域 F 上的线性空间 $F[x]$.

3° 数域 F 上所有 n 阶矩阵,按照矩阵的加法,以及数与矩阵的乘法组成数域 F 上的线性空间 $M_n(F)$.

4° 定义在 $[a,b]$ 上的所有连续实函数集合 $C_{[a,b]}$,其元素 f,g 的和记为 $f+g$, $f+g$ 是在 $[a,b]$ 上定义的连续实函数.它在点 x 的值定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in[a,b].$$

又元素 f 乘实数 k 所得到的 $C_{[a,b]}$ 中元素 kf 定义为

$$(kf)(x)=kf(x),\quad x\in[a,b].$$

按照上述规定的线性运算,该集合组成一个实线性空间 $C_{[a,b]}$.

5° 设 F_1,F_2 都是数域,且 $F_1\subseteq F_2$,则 F_2 可以看成 F_1 上的线性空间.

6° 一个非齐次线性方程组的所有解向量的集合,对通常的向量加法和数乘法不构成线性空间;而数域 F 上的 n 元齐次线性方程组的所有解向量的集合,按 F^n 的向量加法和数乘法,构成数域 F 上的线性空间,这个线性空间叫这个方程组的解空间.

7° 数域 F 上所有 n 次多项式的集合,n 是固定的自然数,对于通常的多项式加法、数乘运算,该集合不能组成 F 上的线性空间.

数域 F 上所有次数小于 n 的多项式与零多项式按多项式加法及数与多项式乘法构成 F 上的线性空间 $F_n[x]$.

例 1　$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集合.如下规定 $\mathbf{R}^+$ 上的加法 $\oplus$ 及数乘法 $\circ$:

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta},\quad k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^k,$$

证明 $\mathbf{R}^+$ 作成 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

证　下面验证 $\mathbf{R}^+$ 对于上面两种运算满足定义中的 8 个条件.

加法 $\oplus$ 适合交换律与结合律可归结为实数乘法适合交换律与结合律,这显然成立.

下面求 $\mathbf{R}^+$ 对加法 $\oplus$ 的零向量.设零向量为 $\boldsymbol{x}$,由定义有

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha},\quad 亦即\quad \boldsymbol{x}=1.$$

这时对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^+$,有 $\boldsymbol{\alpha}\oplus 1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,因而 $\mathbf{R}^+$ 的零向量就是数 1.

再求 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.设 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,由定义有

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\alpha}'=1\ (零向量),\quad 即\quad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'=1,$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}'=\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量是 $\dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}}$.

对于其他算律,易验证有

$$k\circ(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^k=\boldsymbol{\alpha}^k\boldsymbol{\beta}^k=\boldsymbol{\alpha}^k\oplus\boldsymbol{\beta}^k=k\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus k\circ\boldsymbol{\beta};$$

$$(k+l)\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{k+l}=\boldsymbol{\alpha}^k\oplus\boldsymbol{\alpha}^l=k\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus l\circ\boldsymbol{\alpha};$$

$(kl)\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{kl}=(\boldsymbol{\alpha}^{l})^{k}=k\circ(\boldsymbol{\alpha}^{l})=k\circ(l\circ\boldsymbol{\alpha})$;

$1\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{1}=\boldsymbol{\alpha}$.

故 $\mathbf{R}^{+}$ 关于所给的两种运算作成 $\mathbf{R}$ 上的向量空间 .

(2) 线性空间的性质

1° V 的零元或零向量是唯一的 .

2° V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元即负向量是唯一的 .

3° $0\boldsymbol{\alpha}=0,\boldsymbol{\alpha}\in V;a0=0,a\in F$.

4° $a(-\boldsymbol{\alpha})=(-a)\boldsymbol{\alpha}=-a\boldsymbol{\alpha},a\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$.

5° 若 $a\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V,a\boldsymbol{\alpha}=0$,则 $a=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=0$.

4.2 有限维线性空间 V 的结构

4.2.1 几个重要概念

(1) 线性组合 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}\in V,k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$,则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合 . 又如果

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

那么向量 $\boldsymbol{\beta}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合,或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(2) 线性相关、线性无关 假定 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$. 如果在 F 中存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为**线性相关**;若上式仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才成立,或者对于 F 中任意不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,总有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$,就称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关** .

(3) 如果 V 中一个向量组的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足下列条件,那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 称为**这向量组的最大线性无关组**(简称最大无关组):

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

2° 该向量组中任一向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合 .

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的最大无关组所含向量的个数称之为该**向量组的秩** . 只含零向量的向量组的秩是零 .

例 2 求线性空间 $\mathbf{R}^4$ 中向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1\ -1\ 2\ 4]$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[0\ 3\ 1\ 2]$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[3\ 0\ 7\ 14]$,

$\boldsymbol{\alpha}_4=[1\ -2\ 2\ 0]$, $\boldsymbol{\alpha}_5=[2\ 1\ 5\ 10]$

的秩及一个最大无关组,并将其余向量表示为该最大无关组的线性组合 .

解 令矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}]$. 用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}].$$

因向量组 $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}$ 的秩为 3,$\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}$ 为其一个最大无关组,且

$$\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}},$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}$,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3,且 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为其一个最大无关组 .

又

$$\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\qquad\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(5) 设线性空间 V 的两个向量组为

组 ①:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$;

组 ②:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

若组 ① 的每个向量均能由组 ② 线性表示,则称组 ① 可由组 ② 线性表示 .

若组 ① 可由组 ② 线性表示,组 ② 也可由组 ① 线性表示,则称向量组 ① 和向量组 ② 等价 .

4.2.2 线性空间的基和维数

(1) V 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 若满足下列条件:

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

2° V 中任一向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合 .

就说它是 V 的一组基,即线性空间的最大无关组(假如存在的话)叫做线性空间 V 的**基** .

(2) 有限维线性空间 V 的基所含向量的个数 n,称为 V 的**维数**,记作维$(V)=n$ 或 $\dim V=n$. 而 V 叫做 n **维线性空间** .

(3) 任意 n 个线性无关的向量都形成 V 的一组基 .

(4) 任意 $m(m>n)$ 个向量都是线性相关的 .

(5) 任意 $m(m<n)$ 个线性无关向量都可扩充成 V 的一组基 .

(6) 数域 F 上的线性空间 V 若不是有限维的,则称为无限维线性空间 .

例如,$C_{[a,b]}$ 和 $F[x]$ 都是 F 上的无限维线性空间 .

4.3 坐标与坐标变换

4.3.1 坐标的概念

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为线性空间 V 的一组基,则 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可唯一地表示成

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

式中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是唯一确定的复数，它称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的**坐标**.

4.3.2　基变换与坐标变换的关系

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，它们的关系是

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tag{4-1}$$

且 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于这两组基的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{4-2}$$

且称(4-1)式为 V 的基变换，(4-2)式为相应于基变换(4-1)式的**坐标变换**. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的**过渡矩阵**，是可逆矩阵.

上述命题的逆亦成立，即如果 V 的坐标变换为(4-2)式，其相应的基变换就是(4-1)式.

例 3　在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 绕原点逆时针旋转 φ，且 $\boldsymbol{i}$ 变为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{j}$ 变为 $\boldsymbol{e}_2$，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 也是一组基，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi, \\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}(-\sin\varphi) + \boldsymbol{j}\cos\varphi. \end{cases}$$

又设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中任一向量，且

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2.$$

试求坐标变换的关系式.

解　由题设，易求出基变换的关系为

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\boldsymbol{A},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

又因

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

故所求的坐标变换关系式为

$$(y_1,y_2) = (x_1,x_2)(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (x_1,x_2)\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

这就是解析几何中旋转坐标轴的坐标变换公式.

4.4　线性子空间

4.4.1　线性子空间的概念

(1) 设 W 是数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集. 若 W 对于 V 的加法和数乘这两种运算也构成 F 上的线性空间，W 就称为 V 的一个**线性子空间**，简称**子空间**.

(2) 对于线性空间 V，它本身就是 V 的一个子空间；由 V 的一个零向量构成的零空间 $\{\mathbf{0}\}$ 也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间.

4.4.2　线性子空间的判定

F 上线性空间 V 的非空子集 W 作成 V 的一个子空间的充要条件是

1° 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in W$，则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$；

2° 若 $\boldsymbol{\alpha} \in W, k \in F$，则 $k\boldsymbol{\alpha} \in W$.

4.4.3　子空间的形成

设 V 是数域 F 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的所有线性组合的集合是 V 的子空间，称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间，记为

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = \{a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid a_i \in F\}.$$

(1) **子空间的交**　假定 V_1, V_2 是 F 上线性空间 V 的子空间，则它们所有公共元的集合形成 V 的子空间，称为 V_1 与 V_2 的交，记作 $V_1 \cap V_2$，即

$$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\alpha} \in V_2\}.$$

(2) **子空间的和**　假定 V_1, V_2 是 V 的子空间，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别是 V_1, V_2 中任意元，那么所有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 这样元的集合形成 V 的子空间，称为 V_1, V_2 的和，记为 $V_1 + V_2$，即

$$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2\}.$$

(3) 维数公式　设 V_1, V_2 是有限维线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

若 n 维线性空间 V 中两个子空间 W_1 和 W_2 的维数之和大于 n，则 W_1、W_2 必含有公共非零向量.

例 4　在线性空间 F^4 中，给出两向量组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ 2\ 1\ 0], \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = [-1\ 1\ 1\ 1]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = [2\ -1\ 0\ 1], \\ \boldsymbol{\beta}_2 = [1\ -1\ 3\ 7]; \end{cases}$$

求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) + L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 与 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) \cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的维数与基.

解　先求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) + L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的基. 因

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) + L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2) = L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

故只需求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个最大无关组. 又因

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为所求的一个最大无关组．且

$$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1.$$

因而$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\}$ 为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的一组基,其维数为 3.

显然,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,故

$$维(L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2))=维(L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2))=2.$$

由维数公式,有

$$维(L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2))=2+2-3=1.$$

又因

$$\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

而

$$4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=[-5\ 2\ 3\ 4]\neq\mathbf{0},$$

故 $4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的基．

4.4.4 子空间的直和

(1) **子空间的直和** 设 V 有子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_s$. 如果 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 中每个向量的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i\in W_i,i=1,2,\cdots,s,$$

都是唯一的,则 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 称为 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 的直和,记作 $W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$.

(2) 子空间直和的性质:

1° $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\alpha}_i\in W_i(i=1,2,\cdots,s)$$

仅当 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 全为零向量时才成立．

2° $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$W_i\cap(W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_s)=\mathbf{0},$$

即

$$W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j=\varnothing(空集)(i=1,2,\cdots,s).$$

3° 设 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 为有限维线性空间 V 的子空间,和 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和的充要条件是

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_s)=\sum_{i=1}^{s}\dim W_i.$$

例5 设 F^n 是数域 F 上 n 元列向量组成的线性空间．$\boldsymbol{A}$ 是 F 上的 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,记

$$W_1=\{\boldsymbol{AX}\mid 任意\ \boldsymbol{X}\in F^n\},$$
$$W_2=\{\boldsymbol{X}\in F^n\mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}.$$

试证 $F^n=W_1\oplus W_2$.

证 易证 W_1 与 W_2 为 F^n的子空间．下面证 $F^n=W_1\oplus W_2$.

先证 $F^n=W_1+W_2$,显然有 $W_1+W_2\subseteq F^n$. 下证 $F^n\subseteq W_1+W_2$.

设 $\boldsymbol{X}$ 为 F^n中任一向量,则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}),$$

显然有 $\boldsymbol{AX}\in W_1$. 现证 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}\in W_2$. 事实上

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}\in W_2$,于是有 $F^n\subseteq W_1+W_2$,所以

$$F^n=W_1+W_2.$$

再证 $F^n=W_1\oplus W_2$. 为此证 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1\cap W_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1$,于是存在 $\boldsymbol{\beta}\in F^n$,使 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\beta}$.

又因 $\boldsymbol{\alpha}\in W_2$,故 $\boldsymbol{A\alpha}=\mathbf{0}$,于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\beta})=\boldsymbol{A\alpha}=\mathbf{0},$$

即 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$,所以

$$F^n=W_1\oplus W_2.$$

5 线性变换

5.1 线性变换的定义及基本性质

5.1.1 线性变换的概念

设 V 为数域 F 上的线性空间,它到自身的映射称为线性空间的变换．设 σ 是 V 的变换,如对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in F$,都有

1° $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

2° $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,

那么 σ 叫做 V 的一个**线性变换**．

5.1.2 线性变换的基本性质

(1) 设 σ 是 F 上线性空间 V 的线性变换,则

1° $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

2° $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

3° $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$;

4° 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关,则$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$线性相关,其中$k_i\in F,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i\in V(i=1,2,\cdots,m)$.

(2) 线性变换由基向量的象唯一确定.

1° 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$构成$V$的一组基底,又设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\in V$,则唯一地存在一个线性变换$\sigma$,使

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m).$$

2° 设V为F上的线性空间,令

$$L(V)=\{\sigma\mid\sigma\text{ 是 }V\text{ 的线性变换}\},$$

任给$\sigma,\tau\in L(V)$,若对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$都有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$,则称$\sigma,\tau$相等,记为

$$\sigma=\tau.$$

3° $\sigma\in L(V)$,对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,如有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,则称$\sigma$是零变换;如有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,则称$\sigma$为$V$的恒等变换(单位变换).

(3) 变换是线性变换的充要条件　线性空间V的一个变换σ是线性变换的充要条件为:对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,a,b\in F$,有

$$\sigma(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta})=a\sigma(\boldsymbol{\alpha})+b\sigma(\boldsymbol{\beta}).$$

5.1.3 线性变换的象与核

(1) 设σ是V的线性变换,V中所有各元的象构成V的子空间,称为**象子空间**,用$\mathrm{Im}(\sigma)$或$\sigma(V)$表示,即

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\}.$$

(2) σ为V的线性变换,V中零元的所有象源构成V的子空间,称为σ的**核子空间**,用$\mathrm{Ker}(\sigma)$或$\sigma^{-1}(\mathbf{0})$表示,即

$$\mathrm{Ker}(\sigma)=\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V,\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\}.$$

(3) $\mathrm{Im}(\sigma),\mathrm{Ker}(\sigma)$的维数分别叫做$\sigma$的秩与亏.

(4) 假定σ是n维线性空间V的线性变换,那么σ的秩与其亏的和等于线性空间的维数,即

$$\text{维}(\mathrm{Im}(\sigma))+\text{维}(\mathrm{Ker}(\sigma))=\text{维}(V).$$

例1　试证

$$\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2-3x_3-x_4,3x_1-x_2-3x_3+4x_4,0,0)$$

是4维线性空间$\mathbf{R}^4$的线性变换,并求σ的秩及亏.

解　根据定义易验证σ是$\mathbf{R}^4$的线性变换.它的象子空间$\sigma(V)$是所有形如$(x_1,x_2,0,0)$的向量形成的子空间,即

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=\{(x_1,x_2,0,0)\mid x_1,x_2\in\mathbf{R}\},$$

而$(x_1,x_2,0,0)=x_1(1,0,0,0)+x_2(0,1,0,0)$,显然其维数是2.

它的核$\mathrm{Ker}(\sigma)$是线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=0,\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=0\end{cases}$$

的解空间.又由

$$\begin{bmatrix}1&1&-3&-1\\3&-1&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&-\dfrac{3}{2}&\dfrac{3}{4}\\0&1&-\dfrac{3}{2}&-\dfrac{7}{4}\end{bmatrix}$$

可知,其解空间的一组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[\frac{3}{2}\ \ \frac{3}{2}\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=[-\frac{3}{4}\ \ \frac{7}{4}\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}.$$

因而其解空间是由所有形如

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad\forall k_1,k_2\in\mathbf{R}$$

的向量形成的子空间,显然其维数为2.所以秩σ是2,σ的亏也是2.这时满足

$$\text{维}(\mathrm{Im}(\sigma))+\text{维}(\mathrm{Ker}(\sigma))=\text{维}(\mathbf{R}^4)=4.$$

5.2 线性变换的运算及其简单性质

5.2.1 线性变换的运算

(1) 线性空间V上的线性变换的加减法、数乘、乘法

1° $(\sigma\pm\tau)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})\pm\tau(\boldsymbol{\alpha}),\forall\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma,\tau\in L(V)$.

2° $(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma\in L(V)$.

3° $(\sigma\tau)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha})),\boldsymbol{\alpha}\in V;\sigma,\tau\in L(V)$.

易验证$\sigma\pm\tau,k\sigma,\sigma\tau$均为$V$上的线性变换.

(2) 线性变换运算的简单性质

1° 线性变换的运算规律与矩阵相同.

2° 数域F上线性空间V的所有线性变换的集合$L(V)$构成F上的一个线性空间.

(3) 设$\sigma\in L(V)$,如σ的秩等于n,即$\mathrm{Im}(\sigma)=V$时,σ称为满秩线性变换.

(4) 逆变换　假定$\sigma\in L(V)$,如果有$\tau\in L(V)$,使

$$\sigma\tau=\tau\sigma=I(I\text{ 是恒等变换}),$$

那么σ叫做可逆变换,τ叫做σ的逆变换,记为$\sigma^{-1}=\tau$.

如果线性变换σ是可逆的,那么其逆变换σ^{-1}也是线性变换.

例2　在线性空间$\mathbf{R}^2$中,设σ是绕原点O按反时针方向旋转90°的线性变换,τ是绕原点O按顺时针方向旋转90°的线性变换.试证明σ,τ都是可逆的线性变换,且σ是τ的逆变换,τ是σ的逆变换.

证　设任意$\boldsymbol{\alpha}=(x,y)\in\mathbf{R}^2$.由题设,则有

$$\sigma\boldsymbol{\alpha}=\sigma(x,y)=(-y,x),\tau\alpha=\tau(x,y)=(y,-x).$$

又由线性变换乘法的定义得到

$$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma\tau(x,y)=\sigma[\tau(x,y)]=\sigma(y,-x)=(x,y)=\boldsymbol{\alpha},$$
$$\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(x,y)=\tau[\sigma(x,y)]=\tau(-y,x)=(x,y)=\boldsymbol{\alpha},$$

即$\sigma\tau=\tau\sigma=I$.因此σ,τ都是可逆的线性变换,且τ是σ的逆变换,σ也是τ的逆

变换 .

(5) $\sigma \in L(V)$,σ 有逆变换的充要条件是 σ 是满秩变换,或者是一对一的变换,即 $\mathrm{Im}(\sigma) = V$ 或 $\mathrm{Ker}(\sigma) = 0$.

5.3　线性变换与矩阵

5.3.1　线性变换的矩阵

假定 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基 . 如果

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为 σ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵 .

例 3　在四维线性空间 F^4 中,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ 2\ 0\ 0],\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = [0\ 1\ 0\ 3],$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = [1\ 1\ 1\ 0],\quad \boldsymbol{\alpha}_4 = [0\ 0\ 5\ 0]$$

为一组基,又知线性变换 σ 使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) = \lambda\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,3,4)$. 求 σ 及其矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　① 求 σ 就是求 F^4 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象的法则 . 设

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4,$$

则

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}) &= \sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4)\\ &= \lambda(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4) = \lambda\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}$,因而 σ 是 F^4 的数乘变换 .

② 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵 . 因

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) &= 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3) &= 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_4) &= 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}_4,\end{aligned}$$

又所求矩阵是上一组等式中系数矩阵的转置矩阵,故

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

5.3.2　线性变换与其矩阵的关系

(1) 当基底确定后,线性变换与其矩阵一一对应,且保持如下运算关系:

假如 σ,τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换,它们关于 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,那么

1° $\sigma+\tau$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$;

2° $k\sigma$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵是 $k\boldsymbol{A}, k \in F$;

3° $\sigma\tau$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{AB}$.

(2) 线性变换 σ 的秩等于其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 .

(3) 同一个线性变换关于不同基的矩阵相似,反之,相似矩阵可看成同一线性变换在不同基下的矩阵 .

5.4　线性变换的对角化与准对角化

5.4.1　特征根与特征向量的概念

(1) 设 V 为数域 F 上的线性空间,$\sigma \in L(V)$,如果对于 $\lambda \in F$,在 V 中有 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0})$,使

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha},$$

则称 λ 为 σ 的一个特征根(特征值),$\boldsymbol{\alpha}$ 为 σ 属于特征根 λ 的一个特征向量 .

(2) 假如 σ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{A}$,那么 σ 的特征根 λ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根;σ 的属于 λ 的特征向量关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量 .

5.4.2　线性变换可对角化的条件

(1) 若 $\sigma \in L(V),\lambda \in F$ 是 σ 的特征根 . 称

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V,\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}\}$$

为 σ 的属于 λ 的**特征子空间** .

(2) 设 $\sigma \in L(V)$,如果 V 中存在一组基,使得 σ 在该组基下的矩阵是对角形,就说**线性变换 σ 可对角化** .

(3) 设 σ 是 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 . 下面 3 个条件都是 σ 可对角化的充要条件:

1° σ 有 n 个线性无关的特征向量;

2° σ 的特征根都在 F 内,且对于 σ 的每个特征根 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,特征子空间 V_{λ_i} 的维数等于 λ_i 在特征多项式中的重数;

3° V 可分解为 σ 的特征子空间的直和 .

5.4.3　线性变换准对角化的条件

(1) 当线性变换不能对角化时,如能找到一组基,使其基下矩阵成准对角形,称该线性变换准对角化 .

(2) 设 V 是 F 上线性空间,$\sigma \in L(V)$,W 是 V 的子空间 . 若 $\sigma(W) \subseteq W$,即对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in W,\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in W$,则称 W 为 σ 的一个**不变子空间** .

例 4　设 $\sigma \in L(V)$,则 $\mathrm{Im}(\sigma),\mathrm{Ker}(\sigma)$ 都是 σ 的不变子空间,即 σ 的象子空间与核都是 σ 的不变子空间 .

例 5　V 及 $\{\boldsymbol{0}\}$ 是任意 $\sigma \in L(V)$ 的不变子空间,V 及 $\{\boldsymbol{0}\}$ 称为 σ 的平凡不变子空间 .

(3) 线性变换准对角化的充要条件　$\sigma \in L(V)$,σ 可准对角化的充要条件是 V

可分解为 σ 的若干个不变子空间的直和.

5.5 线性空间的同构

5.5.1 几个基本概念

(1) 假定 V,U 是同一数域 F 上的两个线性空间. 映射 $\sigma: V\to U$ 若满足下列两个条件:

1° 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

2° 若 $k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$,则 $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,$\sigma$ 就称为 V 到 U 的线性变换.

例 6 假设 $M_n(F)$ 到数域 F 的变换为

$$\sigma(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\quad(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\text{ 为矩阵 }\boldsymbol{A}\text{ 的迹}).$$

因

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B},\quad \mathrm{tr}k\boldsymbol{A}=k\mathrm{tr}\boldsymbol{A},$$

故 σ 是 $M_n(F)$ 到 F 的线性变换.

(2) 若 σ 是 V 到 U 的线性变换,τ 为 U 到 V 的线性变换,那么,当 $\sigma\tau=I$,且 $\tau\sigma=I$(I 为恒等变换)时,τ 称为 σ 的逆变换,记为 $\tau=\sigma^{-1}$;σ 为 τ 的逆变换,记为 $\sigma=\tau^{-1}$. 有逆变换的线性变换称为可逆变换(满秩线性变换).

(3) 如果 σ 是 V 到 U 的可逆变换,那么称 σ 为 V 到 U 的**同构变换**,或说 V,U 同构,记为 $V\simeq U$.

当 $V=U$ 时,σ 就是 V 的自同构变换,简称 V 的自同构.

5.5.2 同构变换的性质

(1) 同构变换保持向量间的一切线性关系.

(2) 数域 F 上两个有穷维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数. 特别是数域 F 上 n 维线性空间都与 F^n 同构.

(3) 数域 F 上 n 维线性空间 V 的一切自同构所成的集 G 在乘法之下构成一个群,称 G 为 V 的线性变换群,记作 $\mathrm{GL}(n,F)$.

5.6 对偶空间与对偶变换

5.6.1 对偶空间的定义及其基本性质

(1) 假定 V 是 F 上的线性空间,把 F 看成 F 上的 1 维线性空间,则 V 到 F 的线性变换称为 V 的**线性泛函**.

由线性泛函定义可知,V 中向量经线性泛函作用后,变为数域 F 中的数,而不是 V 中向量.

(2) 设 f 是数域 F 上线性空间 V 上的一个线性泛函,则

1° $f(\mathbf{0})=0$;

2° $f(-\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha})\quad(\boldsymbol{\alpha}\in V)$;

3° 对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及数域 F 中任意数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有

$$f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1f(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2f(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_sf(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

例 7 对 F^n 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1\ x_2\cdots\ x_n)$,定义 $f(\boldsymbol{\alpha})=x_1$,则 f 为 F^n 的一个线性泛函.

一般地,在 F 中任意取定 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,定义

$$g(\boldsymbol{\alpha})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

则 g 也是一个线性泛函.

(3) 设 V 为 F 上的线性空间,V 的全部线性泛函所成的集合为 $\widehat{V}$,定义 $\widehat{V}$ 的运算如下:

1° 加法 对 $\widehat{V}$ 中任意两个线性泛函 f,g,定义 $f+g$ 为

$$(f+g)(\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha})+g(\boldsymbol{\alpha}).$$

易证 $f+g$ 也是 V 的一个线性泛函,称为 f 与 g 的和.

2° 数量乘法 对 F 中任意数 k 及 $\widehat{V}$ 中任意线性泛函 f,定义 kf 为

$$(kf)(\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha}),$$

则 kf 也是 V 的线性泛函,称为 k 与 f 的数量乘积.

易验证 $\widehat{V}$ 对于上面两种运算满足线性空间定义中的 8 条算律. 因此 $\widehat{V}$ 是 F 上一个线性空间,称此空间 $\widehat{V}$ 为 V 的**对偶空间**.

(4) 设 V 是 F 上 n 维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基. 定义 V 的 n 个线性泛函 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ 如下:

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).\tag{5-1}$$

即 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ 为 $\widehat{V}$ 的一组基,称为 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的**对偶基**. 因而,$\widehat{V}$ 的维数等于 V 的维数.

例 8 设 $f\in\widehat{V},\boldsymbol{\alpha}\in V$,而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为 V 的基底,$\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的对偶基底. 试求 $f(\boldsymbol{\alpha})$.

解 设

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$$\boldsymbol{f}=b_1\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_2\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_n\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n.$$

由(5-1)式得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\alpha})&=(b_1\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1+b_2\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+b_n\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n)(a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=\Big(\sum_{i=1}^n b_i\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n a_j\boldsymbol{\alpha}_j\Big)\\&=\sum_{i,j=1}^n b_ia_j\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{i=1}^n b_ia_i\end{aligned}$$

$$= [b_1\ b_2 \cdots\ b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{5-2}$$

例 9 求对于 $\mathbf{R}^3$ 的基底

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1\ 0\ 0], \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = [1\ 1\ 0], \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = [1\ 1\ 1]$$

的对偶空间的对偶基底 $\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3\}$.

解 设 $\boldsymbol{\alpha} = [x, y, z] \in \mathbf{R}^3$,归结求 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1(\boldsymbol{\alpha}), \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2(\boldsymbol{\alpha}), \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3(\boldsymbol{\alpha})$. 因 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in \widehat{V}$,根据(5-2)式,先求 a_1, a_2, a_3,使 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + a_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 由 $[x\ y\ z] = [a_1 + a_2 + a_3\ \ a_2 + a_3\ \ a_3]$ 得到

$$a_1 + a_2 + a_3 = x, \quad a_2 + a_3 = y, \quad a_3 = z.$$

即

$$a_1 = x - y, \quad a_2 = y - z, \quad a_3 = z.$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} = (x - y)\boldsymbol{\alpha}_1 + (y - z)\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}_3.$$

又

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = 1 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3,$$
$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 1 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3,$$
$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3 = 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1 + 0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2 + 1 \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3.$$

由(5-2)式得到

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1(\boldsymbol{\alpha}) = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{bmatrix} = x - y;$$

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2(\boldsymbol{\alpha}) = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{bmatrix} = y - z;$$

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3(\boldsymbol{\alpha}) = [0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{bmatrix} = z.$$

(5) V 的两组基的对偶基之间的关系. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 为 n 维线性空间 V 的两组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,那么 n 维线性空间 V 的对偶空间 $\widehat{V}$ 中相应的对偶基有关系:

$$(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{5-3}$$

例 10 所有不超过 2 次 的实系数多项式组成一实线性空间 $\mathbf{R}_2[x]$,取其两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 1, \boldsymbol{\alpha}_2 = x, \boldsymbol{\alpha}_3 = x^2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = 1, \boldsymbol{\beta}_2 = 1 + x, \boldsymbol{\beta}_3 = 1 + x + x^2$. 试求 $\mathbf{R}_2[x]$ 的对偶空间 $\widehat{\mathbf{R}}_2[x]$ 中相应的对偶基 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3$ 到 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_3$ 的过渡矩阵.

解 由题设有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

再由(5-3)式即得

$$(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_3) = (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$
$$= (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) $\widehat{V}$的对偶空间是 V, $\widehat{V}$的基底 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ 的对偶基底是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$,即

$$\widehat{\widehat{V}} = V, \quad \widehat{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

这样, V 可看成$\widehat{V}$的对偶空间,又 $\widehat{V}$是 V 的对偶空间,于是 V 和$\widehat{V}$互为对偶空间,这就是对偶空间名词的来由.

5.6.2 对偶变换

(1) 设 σ 为线性空间 V 的一个线性变换, $\boldsymbol{f}$ 是 V 的一个线性泛函. 定义

$$\widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{f}(\sigma\boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in V,$$

则 $\widehat{\boldsymbol{f}}$为 V 的线性泛函. 再定义 $\widehat{V}$的变换 $\widehat{\sigma}$为

$$\widehat{\sigma}(\boldsymbol{f}) = \widehat{\boldsymbol{f}}, \quad \boldsymbol{f} \in \widehat{V},$$

则 $\widehat{\sigma}$为 $\widehat{V}$的一个线性变换,且称 $\widehat{\sigma}$为 σ 的**对偶变换**.

(2) 设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 是 V 的一组基. 若 σ 在这组基下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$,则 $\widehat{\sigma}$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基 $\{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(3) 设 V, U 是 F 上线性空间, σ 是 V 到 U 的线性变换,即

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}\sigma, \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}} \in \widehat{U},$$

则 $\widehat{\sigma}$是 $\widehat{U}$到 $\widehat{V}$的线性变换,这种线性变换称为 σ 的对偶变换.

(4) 假定 σ 是 V 到 U 的线性变换,则

1° σ 和其对偶变换 $\widehat{\sigma}$有相同的秩;

2° 若 σ 对于 V 的基底 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 及 U 的基底 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\widehat{\sigma}$对于对偶基底 $\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_m\}$ 及 $\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$,则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

6　欧氏空间与酉空间

6.1　欧氏空间的定义与性质

6.1.1　欧氏空间的定义

(1) 假定 V 是实空间,对于 V 中任意两向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,如果有一实数与其对应,记成 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,且还满足下列条件:

1° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

2° $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, k 是任意实数;

3° $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$;

4° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

那么这实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**.

(2) 一个实空间,如果其中任意两个向量有内积运算,则这个空间就叫做**欧氏空间**.有时也称为(实)内积空间.

例1　在 $\mathbf{R}^n$ 中设

$$\boldsymbol{\alpha} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta} = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]^{\mathrm{T}},$$

规定

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

则易验证,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 满足定义中各条件,所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是内积.因而 $\mathbf{R}^n$ 对上述内积作成欧氏空间.

一个实(线性)空间有许多不同的内积,因而可对不同内积作成不同的欧氏空间.但一般约定,对欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,总是指 $\mathbf{R}^n$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

例2　在闭区间 $[a,b]$ 上,在所有 x 的连续函数形成的无穷维实空间 $C_{[a,b]}$ 中,对任意 $f(x),g(x)$,规定

$$(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

根据积分性质,易验证,$C_{[a,b]}$ 是内积空间.

(3) **柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式**

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}). \tag{6-1}$$

在内积空间 $\mathbf{R}^n$ 中,(6-1)式就是不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big);$$

在内积空间 $C_{[a,b]}$ 中,(6-1)式就是不等式

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

6.1.2　欧氏空间的度量

(1) **向量的长**　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长为 $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.如果 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$,那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为单位向量或标准向量.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为欧氏空间 V 的向量,c 为实数,则

1° $|c\boldsymbol{\alpha}| = |c||\boldsymbol{\alpha}|$,

2° $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$(柯西-施瓦兹不等式),当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.

3° $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$.

上述性质与欧氏空间的维数无关.

(3) **向量的夹角**　在欧氏空间 V 中,两非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 规定为

$$\theta = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为相互**正交向量**.

6.2　度量矩阵及其性质

6.2.1　度量矩阵的概念

假设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的基,那么

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{bmatrix}$$

称为基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的**度量矩阵**.

6.2.2　度量矩阵的性质

(1) 度量矩阵是正定矩阵.

(2) 向量的内积可由度量矩阵确定:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{XAY}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标.

(3) n 维欧氏空间 V 的不同基的度量矩阵是合同的,即如果关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 及 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的度量矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,且由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{P}$,则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}.$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}, (\sigma\tau + \tau\sigma)\boldsymbol{\beta}).$$

故 $\sigma\tau + \tau\sigma$ 为 V 的对称变换．

6.4.2　正交变换

(1) 设 σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换．如果对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,都有 $|\sigma\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$,那么称 σ 为 V 的一个**正交变换**．换言之,正交变换是保长的线性变换．

(2) σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换．下面4个条件都是 σ 为正交变换的充要条件:

1° σ 保持两向量的内积不变;

2° 保持向量长不变;

3° σ 把标准正交基仍然变为标准正交基;

4° σ 关于标准正交基的矩阵是正交矩阵．

6.4.3　欧氏空间的同构(变换)

(1) 假定 V, U 是两个欧氏空间,如果 σ 是作为线性空间 V 到 U 的一个同构变换,且还满足

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,$$

那么 σ 叫做欧氏空间 V 到 U 的一个同构变换．如果欧氏空间 V 和 U 间存在一个同构映射,就说 V 和 U 同构．

(2) 两个有穷维欧氏空间同构的充要条件是它们有相同的维数．特别是 n 维欧氏空间都与欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 同构．

6.5　酉　空　间

6.5.1　酉空间的定义

假如 V 是复空间,如果对于 V 中任意两向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 有一个复数与其对应,记成 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,若此复数又满足下列各条件,那么这复数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积,V 称为**酉空间**,又称为复内积空间:

1° $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}$,这里 $\overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}$ 是 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ 的共轭复数;

2° $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = 0$ 时等号成立;

3° $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}) = k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta})$,对任意 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta} \in V, k_1, k_2 \in F$ 成立．

这里与欧氏空间定义的内积只是条件1°不同.$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 一般是复数,但根据条件1°,$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ 时,$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 就是实数．没有该规定,条件2°就没有意义了．

6.5.2　酉空间的简单性质

(1) 酉空间中内积性质

1° $(\boldsymbol{\alpha}, b\boldsymbol{\beta}) = \bar{b}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;

2° $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2)$;

3° 一般地,若 $a_i, b_i \in F, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i \in V(i = 1,2,\cdots,n)$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{i=1}^n b_i\boldsymbol{\beta}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i\bar{b}_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i);$$

4° $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.

(2) 酉空间 V 的度量矩阵

假设 V 是 n 维酉空间,$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是它的基底,$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中任意两向量．由内积性质,有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i,j=1}^n x_i\bar{y}_j(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$,而 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)(i,j = 1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{X} = [x_1\ x_2 \cdots\ x_n]$,$\overline{\boldsymbol{Y}} = [\bar{y}_1\ \bar{y}_2 \cdots\ \bar{y}_n]$.$\boldsymbol{A}$ 称为 V 关于基底 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的度量矩阵．

6.5.3　酉空间的度量

(1) 若 $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$,则称 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 为酉空间向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长,或称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模．长为1的向量称为单位向量或标准向量．

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为酉空间 V 的向量,k 为一复数,则

1° $|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|$.

2° $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立．

3° $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$(三角不等式).

因酉空间中的内积 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 一般为复数,故向量之间不易定义夹角,但仍引入两向量正交概念．

(3) 酉空间 V 中,若 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,或互相垂直．

(4) 酉空间中,任意一组两两正交的非零向量是线性无关的．如果一组单位向量两两正交,则称其为一个标准正交组,若这个正交组又生成整个空间 V,则称它为 V 的标准正交基．

(5) 设 V 为复数域上的酉空间,S 为 V 的一个子空间．若

1° $S \oplus T = V$;

2° 对 $\boldsymbol{\alpha} \in S$ 和 $\boldsymbol{\beta} \in T$,有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$,

则称 T 为 S 的正交补空间,记为 $T = S^{\perp}$．

(6) 若 S 是有限维酉空间 V 的一个子空间,则 V 中有唯一一个子空间 T 为 S 的正交补空间．

6.5.4　酉空间上线性变换及其性质

(1) 假如酉空间 V 的线性变换 σ,使 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长不变,即

$$|\sigma(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{\alpha}|,$$

那么 σ 称为 V 的**酉交变换**．

(2) 酉交变换有以下性质

1° 酉空间 V 的线性变换 σ 为酉交变换的充要条件是

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

2° 酉空间 V 的线性变换 σ 为酉交变换的充要条件是 σ 把 V 的标准正交基仍然变为标准正交基．

3° 酉空间 V 的线性变换 σ 关于 V 的标准正交基的矩阵为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，则 σ 为酉交变换的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为酉交矩阵．

4° 酉交变换是满秩线性变换，因此也是一对一的线性变换．

5° 酉交变换的特征根的绝对值都是 1.

(3) 设 σ 为酉空间 V 上的线性变换，由关系式

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma^*(\boldsymbol{\beta})),\quad \forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$$

所定义的变换 σ^* 是线性变换，且称 σ^* 为 σ 的**共轭变换**．

(4) 共轭变换有以下性质：

1° $(\sigma^*)^*=\sigma^{**}=\sigma$.

2° $(k\sigma)^*=k\sigma^*,k\in F$.

3° $(\sigma_1+\sigma_2)^*=\sigma_1{}^*+\sigma_2{}^*$.

4° $(\sigma_1\sigma_2)^*=\sigma_2{}^*\sigma_1{}^*$.

5° 若 σ 是可逆线性变换，则 σ^* 也是可逆线性变换，且 $(\sigma^*)^{-1}=(\sigma^{-1})^*$.

6° 若在某一标准正交基下 σ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则共轭变换 σ^* 关于同一组基的矩阵为 A 的共轭转置矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$.

(5) 若 $\sigma=\sigma^*$，有 $(\sigma\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，则 σ 是对称变换，又称 σ 为自共轭变换或埃尔米特(Hermite)变换．

(6) 自共轭变换有以下性质

1° V 的线性变换 σ 为自共轭变换的充要条件：对于 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$(\sigma\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 是实数．

2° 在标准正交基下，自共轭变换的矩阵是埃尔米特矩阵；反之，若线性变换关于一标准正交基的矩阵是埃尔米特矩阵，则必为自共轭变换．

3° 自共轭变换的特征根是实数，它的属于不同特征根的特征向量必正交．

7 二次型与双线性型

7.1 二次型及其矩阵

7.1.1 二次型的矩阵表示

(1) 二次型可表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji}),$$

其中对称矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 称为**二次型 f 的矩阵**，$\boldsymbol{A}$ 的秩又称为 f 的秩．

当 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵时，f 可用 $\boldsymbol{A}$ 唯一地表示为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 不为对称矩阵时，上述表示不唯一．

(2) F 上二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，经线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，仍得到 F 上的二次型，即

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}.$$

它的矩阵是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

7.1.2 合同矩阵及其性质

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上两个 n 阶矩阵．如果 F 上存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

那么就说 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同，记为 $\boldsymbol{B}\backsimeq\boldsymbol{A}$.

(2) 设 f 与 g 是数域 F 上的两个二次型，如果存在一个(系数在 F 中的)满秩线性变换把 f 变为 g，则称二次型 f 与 g 等价．

(3) 数域 F 上两个二次型等价，当且仅当它们的矩阵合同．

(4) 合同的矩阵，其秩相等．

(5) 矩阵之间的合同关系具有反身性、对称性、传递性，因而数域 F 上的所有 n 阶矩阵可按合同关系进行分类．

7.2 二次型化为平方和

(1) 二次型也可按等价关系分类：两个二次型属于同一个等价类，当且仅当它们的对应矩阵属于同一个合同类．这样，用满秩线性变换化简二次型的问题，就相当于在二次型矩阵所在的合同类里找一个最简单的对称矩阵．

(2) 二次型中最简单的一种二次型是只含平方项的二次型即平方和，它称为二次型的标准形．

(3) 数域 F 上任意二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，都可经满秩线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形(平方和)：

$$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,\ d_i\neq0,\quad(i=1,2,\cdots,r).\tag{7-1}$$

其中平方项的个数 r 等于 f 的秩.

(4) 化二次型为平方和的方法，常用的有配平方法及初等变换法等．

7.3 复数域上与实数域上二次型的分类

7.3.1 复数域上二次型的分类

(1) 复数域上秩为 r 的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，可以用适当的满秩线性变换化为规范形：

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2.\tag{7-2}$$

(2) (7-2) 式用矩阵语言叙述就是：对于复数域上秩为 r 的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\ (r\text{ 个 }1), \tag{7-3}$$

即任一复对称矩阵都合同于一个形如(7-3)式的对角矩阵，其中 1 的个数等于该矩阵的秩．

(3) 两个同阶复对称矩阵合同的充要条件是它们的秩相等．

(4) 在复数域内秩相同的二次型有相同的规范形，因而相互等价．二次型的秩可以等于 $0,1,2,\cdots,n$，共有 $n+1$ 种可能．所以复数域上的二次型共有 $n+1$ 个不同的等价类．

7.3.2　实数域上二次型的分类

(1) 秩为 r 的实二次型 f 可以用适当的实满秩线性变换化为规范形：

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2. \tag{7-4}$$

(2) (7-4) 式用矩阵的语言叙述就是：对于秩为 r 的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在一个实满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}\ (p\text{ 个 }1,\ r-p\text{ 个 }-1). \tag{7-5}$$

(3) 与复数域的情形不同，秩为 r 的任意实二次型的规范形不一定相同，但对于每个实二次型 f 来说，它们规范形又是唯一的，这就是下面的惯性定理．

(4) **惯性定理**　在秩为 r 的一个实二次型的规范形 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2$ 中，正项个数 p 是唯一的，因而负项个数 $r-p$ 也是唯一的．显然，规范形由 r,p 这两个数唯一决定．

在实二次型的规范形中，正项个数 p 叫做实二次型的正惯性指数，负项个数 $r-p$ 叫做负惯性指数，正惯性指数与负惯性指数的差称为实二次型的符号差，而其和等于实二次型的秩 r．

(5) 两个实二次型等价的充要条件是它们的秩相等，正惯性指数也相等；或者是其正惯性指数相等，负惯性指数也相等．

这就完全解决了实二次型的分类问题．

例 1　试证：实二次型 f 的秩 r 与符号差 s 同为奇数或同为偶数，且 $|s|\leqslant r$．

证　设 f 的正惯性指数为 p，则负惯性指数为 $r-p$，于是其符号差为

$$s=p-(r-p)=2p-r.$$

因此 r 与 s 同为奇数或同为偶数，且

$$|s|=|p-(r-p)|\leqslant|p|+|r-p|=r.$$

(6) 当一个实二次型对每组不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，均使

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0,\text{或 }\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant 0,$$

则分别称二次型为正定的，负定的，半正定的，半负定的．其它一切实二次型称为不定的(即 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的符号与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有关)或恒等于零的二次型．

(7) **正(负)定二次型的判定**

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正(负)定的充要条件常用的有下面 3 个：

1° f 的正(负)惯性指数为 n；

2° $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的左上角各阶主子式都大于零(左上角各阶主子式负、正相间)；

3° $\boldsymbol{A}$ 的特征根都大(小)于零．

例 2　求 λ 的值，使实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$$

是正定的，并讨论 $\lambda\leqslant 2$ 时的情形．

解　f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & -1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

它的左上角各阶主子式为

$$a_{11}=\lambda,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

$$|\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

要使所给实二次型为正定，必有

$$\begin{cases}\lambda>0,\\ \lambda^2-1>0,\\ (\lambda+1)^2(\lambda-2)>0,\end{cases}$$

解之得到

$$\lambda>2,$$

即 $\lambda>2$ 时，f 是正定的．当 $\lambda\leqslant 2$ 时，由于 $|\boldsymbol{A}|\leqslant 0$，$f$ 既不是正定的，也不是负定的，因而 f 是不定的．

7.4 双线性型

7.4.1 双线性型及其矩阵表示

(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为两组变量．若多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 既对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是齐次线性的，又对 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 是齐次线性的，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 必取下列形式

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1m}x_1y_m + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \\ &\quad \cdots + a_{2m}x_2y_m + \cdots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nm}x_ny_m \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j. \end{aligned} \tag{7-6}$$

形如(7-6)式中那样的多项式，称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**双线性型**．而矩阵

$$A = [a_{ij}]_{n\times m}$$

称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 的矩阵，A 的秩 r 称为 f 的秩．

(2) 与二次型类似，令 $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$，$Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_m]^T$，则(7-6)式可改写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = X^TAY. \tag{7-7}$$

7.4.2 双线性型的标准形

(1) 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 分别经过满秩线性变换

$$\begin{cases} X = PU, 其中\ P = [p_{ij}]_{n\times n}, U = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_n]^T, \\ Y = QV, 其中\ Q = [q_{ij}]_{m\times m}, V = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_m]^T, \end{cases} \tag{7-8}$$

则(7-7)式化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = U^TP^TAQV. \tag{7-9}$$

(2) 如秩$(A) = r$，则存在满秩矩阵 $P = [p_{ij}]_{n\times n}$，$Q = [q_{ij}]_{m\times m}$，使双线型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m) = X^TAY$ 经过满秩线性变换(7-8)式化为标准形：

$$f = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r.$$

7.4.3 对称双线性型及其基本性质

(1) 如果 $m = n$，且 A 是对称矩阵，则双线性型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 称为对称双线性型，一般可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n) = f(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = X^TAY.$$

当 $y_j = x_j$ 时，f 即成为二次型．因此，二次型是双线性型的特例．

(2) 在双线性型 $f(X,Y)$ 中，X，Y 经同一满秩线性变换，当 f 是对称双线性型时，仍然变为对称双线性型．

(3) 如 $f(X,Y) = X^TAY$ 的秩为 r，则有满秩变换使 f 化为标准形，即

$$f = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r.$$

7.4.4 实对称双线性型

(1) 如果 f 的矩阵 A 是实对称矩阵，则 f 称为实对称双线性型．

(2) 实对称双线性型同实二次型一样，也满足惯性定律，即在 f 的标准形

$$f = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_pv_p - u_{p+1}v_{p+1} - u_{p+2}v_{p+2} - \cdots - u_rv_r$$

中，正项个数 p 是唯一确定的，负项个数 $r-p$ 也是唯一确定的．因此，同样有正惯性指数、负惯性指数的概念．

7.4.5 埃尔米特二次型

(1) $2n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n;\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 的一个双线性型

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_ix_j,$$

称为埃尔米特(Hermite)二次型，式中 a_{ij} 是复数，且 $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$，因而 a_{ii} 都是实数．

(2) 令 $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$，$\bar{X} = [\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \cdots\ \bar{x}_n]^T$，$A = [a_{ij}]_{n\times n}$，则

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bar{X}^TAX.$$

(3) 采用适当的满秩复线性变换，可将埃尔米特二次型化为标准形，即

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_ix_j = b_1\bar{y}_1y_1 + b_2\bar{y}_2y_2 + \cdots + b_r\bar{y}_ry_r.$$

其中 r 为 $A = [a_{ij}]$ 的秩，$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 为实数．

(4) 埃尔米特二次型同实对称双线性型一样，也满足惯性定律．即在 H 的标准形

$$\bar{z}_1z_1 + \bar{z}_2z_2 + \cdots + \bar{z}_pz_p - \bar{z}_{p+1}z_{p+1} - z_{p+2}\bar{z}_{p+2} - \cdots - \bar{z}_rz_r$$

中，正项个数 p 是唯一确定的，负项个数 $r-p$ 也是唯一确定的．因此，同样有正惯性指数、负惯性指数等概念．

参考文献

1 北京大学数学系．高等代数．第 2 版．北京：高等教育出版社，1988．
2 熊全淹，叶明训．线性代数．第 3 版．北京：高等教育出版社，1987．
3 周伯壎．高等代数．北京：人民教育出版社，1978．
4 日本数学会．数学百科辞典．北京：科学出版社，1984．