目　录

1　平面坐标系

1.1　直角坐标轴的平移与旋转

1. 平面坐标轴的平移(原点的变换)

设坐标轴的原点由 $O(0,0)$平移至 $O'(a,b)$,构成新坐标系 $x'O'y'$. P 为平面内任一点(见图 1-1),P 在原坐标系中的坐标为(x,y),在新坐标系中的坐标为(x',y'),则

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

2. 坐标轴的旋转(坐标向量的变换)

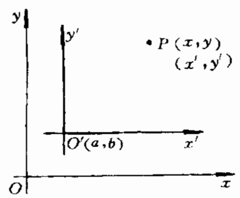


图 1-1

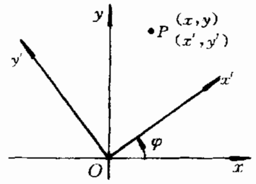


图 1-2

设新坐标轴 Ox', Oy'是原坐标轴 Ox, Oy 绕原点按逆时针方向旋转同一个角度 φ 而成(见图 1-2),则 P 点在原坐标系下的坐标(x,y)与新坐标系下的坐标(x',y')之间的关系为

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

1.2　直角坐标与极坐标

以直角坐标系的原点 O 为极点,Ox 轴为极轴作极坐标系(见图 1-3),在极坐标系下,平面内任一点坐标为 $P=(\rho,\theta)$,其中 ρ 为极径,θ 为极角,则

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

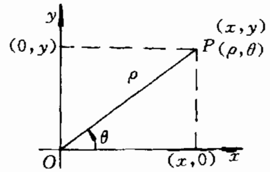


图 1-3

1.3　距离与定比分点

1. 距离

在直角坐标系下,平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

在极坐标系下,平面上两点 $P_1(\rho_1,\theta_1)$,$P_2(\rho_2,\theta_2)$的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}.$$

2. 定比分点

设有向线段 P_1P, PP_2 的数量为 m, n,则按 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{m}{n}=\lambda$($\lambda>0$ 内分,$\lambda<0$ 外分)分线段 P_1P_2 为两段(见图 1-4),分点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1+mx_2}{n+m} = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{ny_1+my_2}{n+m} = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

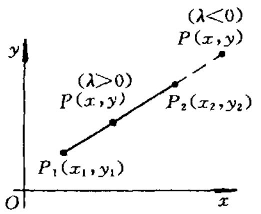


图 1-4

当 $\lambda=1$ 时,则得中点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

1.4　重心与面积

1. 重心

质点系 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$的重心坐标为

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

其中 m_i 是质点 M_i 的质量.

2. 三角形面积

以 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$P_3(x_3,y_3)$为顶点的三角形的面积为

$$A = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

当右边行列式 >0 时,A 取"+",当行列式 <0 时,A 取"-",当 $A=0$ 时,表示 P_1,P_2,P_3 三点共线.

3. 多角形面积

以 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$\cdots$,$P_n(x_n,y_n)$为顶点的凸多角形的面积为

$$A = \pm\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\cdots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)].$$

其顶点或按逆时针编号或按顺时针编号.符号"±"的选定与前面三角形面积 A 的符号的选定相同,即保证 $A\geqslant 0$.

1.5　曲线与方程

1. 曲线方程

如果平面上一条曲线和一个二元方程 $F(x,y)=0$ 有以下关系:

1° 曲线上点的坐标满足这个方程;

2° 坐标适合这个方程的所有点都在这条曲线上.

则此方程称为曲线的方程,而这条曲线称为方程的曲线.

曲线与方程建立了对应关系后,就可以将曲线的几何问题转化为方程的代数问题,用代数方法来研究几何;反之,也可将研究方程的代数问题转化为研究曲线的几何问题.

2. 两曲线的交点

设两条曲线 C_1, C_2 的方程分别是

$$F_1(x,y)=0 \quad \text{和} \quad F_2(x,y)=0,$$

则两条曲线 C_1, C_2 的交点的坐标 $P(x_1,y_1)$就是方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

的一组实数解(见图 1-5).

若方程组没有实数解,则这两个方程的曲线就没有交点.

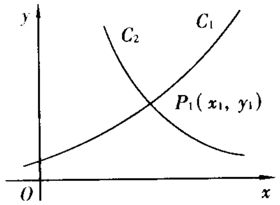


图 1-5

2　直　　线

2.1　直线方程的几种形式

1. 点斜式

通过点 $P_0(x_0,y_0)$,斜率 $k=\tan\varphi$ 的直线(见图 2-1)方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

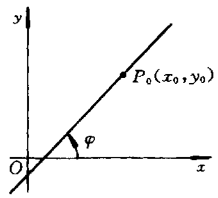


图 2-1

2. 两点式

通过点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的直线方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

3. 斜截式

斜率 $k=\tan\varphi$,在 y 轴上的截距为 c 的直线方程为

$$y=kx+c.$$

4. 截距式

在 x 轴,y 轴上的截距分别为 a,b 的直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

5. 法线式

从原点对直线 L 作法线,设法线长度为 p,法线与 x 轴正向的夹角为 α,则直线 L 的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

其中 $p\geqslant 0, 0\leqslant\alpha<2\pi$.

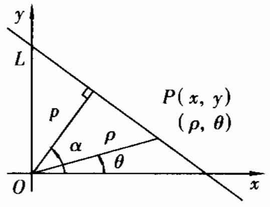


图 2-2

6. 极坐标式

设 $P(\rho,\theta)$ 为直线 L 上任一点,p 为直线 L 上的法距(见图 2-2),则 L 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{\cos(\alpha-\theta)}.$$

7. 参数式

过点 $P_0(x_0,y_0)$,且倾角为 φ 的直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\varphi=x_0+at, \\ y=y_0+t\sin\varphi=y_0+bt. \end{cases}$$

2.2 直线与二元一次方程的关系

1. 直线与二元一次方程的关系

在平面直角坐标系中,任何一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程;反之,任何一个关于 x 和 y 的一次方程,在直角坐标系中的图像是一条直线.

2. 直线方程的一般形式

直线方程的一般形式为

$$Ax+By+C=0,$$

其中 A,B 不同时为零.

假使 $A\neq 0$,那么

1° 若 $B=0$,则方程变为 $x+\frac{C}{A}=0$,表示过 x 轴上的点 $P(-\frac{C}{A},0)$ 且垂直于 x 轴的直线.

2° 若 $B\neq 0$,则方程可化为斜截式

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

若 $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$,则方程可化为截距式

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

2.3 点到直线的距离

直线外一点 $P(x_1,y_1)$ 到直线 $L: Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2.4 两直线间的关系

1. 两直线的交点与夹角

设两条不平行的直线 $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于 $P(x,y)$,如图 2-3 所示,则交点坐标为

$$x=\frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$y=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

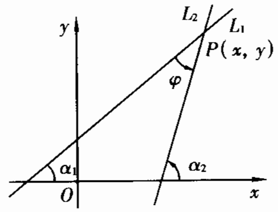


图 2-3

两直线 L_1 与 L_2 的夹角为

$$\tan\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

其中 k_1,k_2 为 L_1 与 L_2 的斜率,夹角 φ 应从第一条直线按逆时针方向量取.

2. 两直线平行

两直线平行的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0, \quad 即 \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

若 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, 则两直线重合.

3. 三直线相交于一点

3 条直线 $A_ix+B_iy+C_i=0\ (i=1,2,3)$ 交于一点的条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

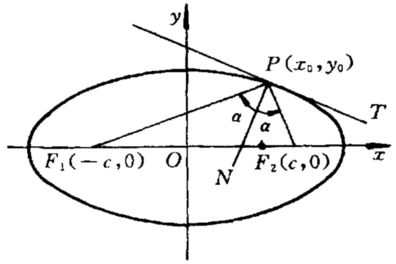


图 3-4

4. **椭圆的切线和法线**

设 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，则该点的切线 PT 的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

过 $P(x_0,y_0)$ 作 PT 的垂线 PN，PN 为椭圆在点 $P(x_0,y_0)$ 的法线，法线 PN 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0/a^2}=\frac{y-y_0}{y_0/b^2}.$$

椭圆的法线平分这一点的两条焦点半径 PF_1，PF_2 所夹的角．如图 3-4 所示．

5. **椭圆的光学性质**

从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，都集中在另一个焦点上．

3.3　双　曲　线

1. **双曲线的标准方程**

中心在原点，实轴在 x 轴上，**实轴**长为 $2a$，**虚轴**长为 $2b$ 的双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

图 3-5 中的 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 是双曲线的焦点，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．称 $2c$ 为焦距．

2. **双曲线的几何特征**

平面上一动点到两个定点的距离之差的绝对值等于定长，这个动点的轨迹就是双曲线．这两个定点就是焦点 F_1，F_2，这个定长就是实轴长 $2a$．

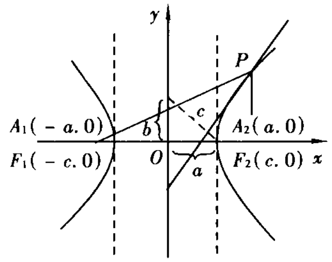


图 3-5

3. **双曲线的参数方程**

图 3-5 所示双曲线的一种参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sec\varphi,\\ y=b\tan\varphi,\end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3}{2}\pi$．另一种形式为

$$\begin{cases}x=a\cosh t,\\ y=b\sinh t.\end{cases}$$

4. **双曲线的切线和法线**

过双曲线上某点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程和法线方程分别为

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

$$\frac{x_0(y-y_0)}{a^2}+\frac{y_0(x-x_0)}{b^2}=0.$$

双曲线的切线具有类似于椭圆的法线的性质，即经过双曲线上一点的切线，平分这一点的两条焦点半径所夹的角．

5. **双曲线的光学性质**

如果光线从一个焦点 F_2 发出，经过靠近 F_2 的双曲线的一支反射后，光线就好像是从另一个焦点 F_1 发出的．如图 3-6 所示．

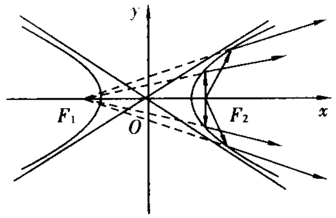


图 3-6

6. **双曲线的渐近线**

中心在原点，边长为 $2a$，$2b$ 的矩形的对角线的延长线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

是双曲线的两条渐近线．

3.4　抛　物　线

1. **抛物线的标准方程**

以原点为顶点，以 x 轴为对称轴开口朝右的抛物线的标准方程为

$$y^2=2px\quad(p>0)$$

图 3-7 中的 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 是抛物线的焦点，直线 $L:x=-\frac{p}{2}$ 是抛物线的准线．

2. **抛物线的几何特征**

平面内一动点到一个定点和一条定直线的距离相等，这个动点的轨迹就是抛物线．这个定点是抛物线的焦点 F，这条定直线 L 为准线，焦点到准线的距离等于 p．

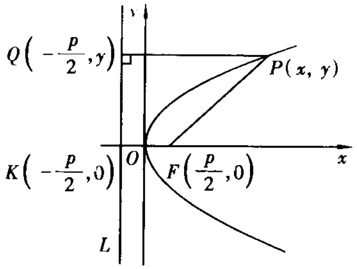


图 3-7

3. **抛物线的参数方程**

图 3-7 所示的抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt.\end{cases}$$

4. **抛物线的切线和法线**

过抛物线上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线和法线的方程分别为

$$y_0y=p(x+x_0),$$

$$p(y-y_0)+y_0(x-x_0)=0.$$

经过抛物线上一点 P 作平行于对称轴的射线 PE，则过 P 的法线 PN 平分 PE 和 PF 所夹

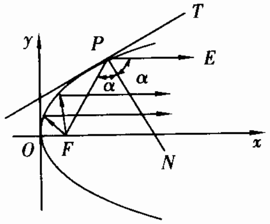


图 3-8

的角.如图 3-8 所示.

5. **抛物线的光学性质**

从抛物线的焦点发出的光,经过抛物线反射后成为一束平行光线射出.探照灯、汽车前灯和太阳能灶就是利用这一性质设计的.

3.5 圆锥曲线

1. **圆锥曲线的定义**

椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线总称为圆锥曲线.椭圆与双曲线具有对称中心,称它们为有心圆锥曲线,抛物线无对称中心,称为无心圆锥曲线.

用一个不过圆锥顶点的平面去截圆锥的侧面,若截面与圆锥的母线平行,则交线为抛物线;若截面与母线不平行,则交线或为椭圆或为双曲线.如图 3-9 所示.

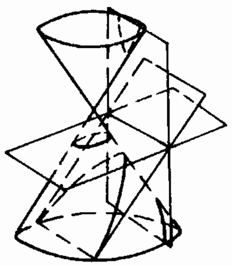


图 3-9

2. **圆锥曲线的几何特征**

平面上一个动点到一个定点(焦点)的距离与到一条定直线(准线)的距离之比为一个常数 e,这个动点的轨迹是圆锥曲线.当 $e<1$ 时是椭圆,$e=1$ 是抛物线,$e>1$ 是双曲线.称 e 为离心率.

1° 椭圆的准线为 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$,离心率 $e=\dfrac{c}{a}$.

2° 双曲线的准线为 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$,离心率 $e=\dfrac{c}{a}$.

3° 椭圆的离心率愈大,椭圆就愈扁平,而双曲线的离心率愈大,双曲线的张口就愈大.

3. **圆锥曲线的极坐标方程**

以圆锥曲线的焦点为极点 O,过 O 作准线的垂线,以此垂线的反向延长线为极轴,则圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

其中 e 为离心率,p 为焦点到同侧的准线的距离.

4. **圆锥曲线与二元二次方程**

圆锥曲线的方程是二元二次方程,反之二元二次方程的图像是圆锥曲线,因此称圆锥曲线为二次曲线.

一般二元二次方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\quad(A,B,C\text{ 不同时为 }0).$$

若 $B=0$,则

1° 当 $A\cdot C\neq0$ 时,其图像或为椭圆(特殊情形收缩为一点),或为双曲线(特殊情形是两条相交直线).

2° 当 $A=0$ 或 $C=0$ 时,其图像是抛物线(特殊情形为两条平行直线).

若 $B\neq0$,则利用判别式 $\Delta=B^2-4AC$,有

1° 当 $\Delta=0$ 时,其图像为抛物线.

2° 当 $\Delta\neq0$ 时,其图像是椭圆或双曲线.

经过坐标变换(坐标轴的平移或旋转),一般方程可化为标准方程.

4 空间坐标系与空间曲线和曲面

4.1 空间坐标系

1. **直角坐标系**

过空间一定点 O 作 3 条互相垂直的数轴:x 轴、y 轴、z 轴,它们的正向符合右手法则,这样的 3 条坐标轴组成了一个空间直角坐标系.点 O 称为坐标原点,由两条坐标轴所确定的平面称坐标面,坐标面有 xOy 面,yOz 面及 zOx 面.如图 4-1 所示.

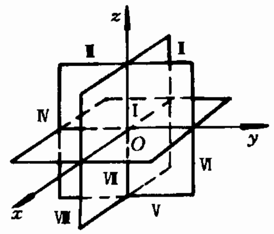


图 4-1

3 个坐标平面把空间分为 8 个卦限:按逆时针方向,xOy 面以上 4 部分命名为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限(其中含 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限为第Ⅰ卦限);xOy 面以下 4 部分命名为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

过空间任一点 M 作 3 个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,其交点的坐标 x,y,z 叫做点 M 的坐标,这样就建立了空间点 M 与有序实数组(x,y,z)的一一对应.

2. **空间两点间的距离**

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,则 P_1,P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

3. **定比分点**

设有向线段 P_1P_2 被分点 P 分为

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m}{n}=\lambda\ (\lambda>0\text{ 内分},\lambda<0\text{ 外分}),$$

则 P 点的坐标为

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{nz_1+mz_2}{n+m}=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

当 $\lambda=1$,得 P_1P_2 中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4. 重心

设有一组质点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，其质量分别为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，则这组质点的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

4.2　空间向量的坐标法

1. 向量的坐标法

设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量(见图 4-2)，$\boldsymbol{a}$ 在 3 条坐标轴上的投影 a_x,a_y,a_z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

这就建立了向量与有序数组的一一对应. 用起点和终点的坐标表示，则为

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

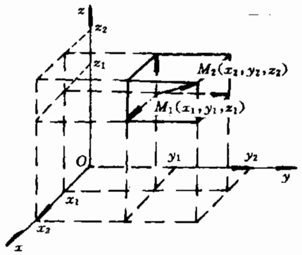


图 4-2

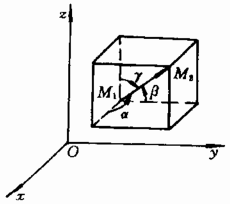


图 4-3

2. 向量的模和方向

1° 模　向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 的模(大小)为

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2° 方向角　非零向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 与 3 条坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 如图 4-3 所示.

3° 方向余弦　设 α,β,γ 为非零向量的方向角，则称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M_2}$ 的方向余弦. 用向量的坐标表示方向余弦的公式为

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

3 个坐标余弦有关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3. 两向量的夹角

设两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦分别为 l_1,m_1,n_1 和 l_2,m_2,n_2，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ 由下式确定

$$\cos\varphi=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$

若 $\cos\varphi=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；若 $\cos\varphi=1$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

4.3　向量的数量积、向量积、混合积

1. 两向量的数量积(亦称内积)

设两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则它们的数量积(内积)是一个数量，用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

若用向量的坐标来表示数量积，则为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

2. 两向量的向量积(亦称外积)

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 的向量积(外积)是一个向量，用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 按这个顺序构成右手系.

用坐标表示 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-b_xa_y\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示与坐标轴 Ox,Oy,Oz 同方向的单位向量.

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$$

3. 三向量的混合积

三向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ 的混合积是一个数量，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix},$$

其几何意义是：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0.$$

4.4 直角坐标系的变换

1. 坐标轴的平移

若坐标方向不变,原点由(0,0,0)平移到(a,b,c),则旧坐标(x,y,z)与新坐标(x',y',z')的关系为

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c. \end{cases}$$

2. 坐标轴的旋转

若原点不动,坐标轴旋转,设新坐标轴对旧坐标轴的方向余弦如表 4-1 所示,则

表 4-1

坐标轴	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z, \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z, \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z. \end{cases}$$

4.5 柱面坐标与球面坐标

1. 柱面坐标

设 $M(x,y,z)$为空间内一点,它在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为(r,θ),则(r,θ,z)叫做点 M 的柱面坐标(见图 4-4),其中

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

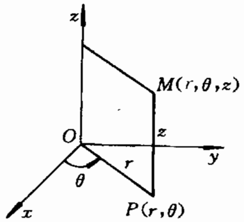


图 4-4

2. 球面坐标

设 $M(x,y,z)$为空间内一点,r 为原点 O 与点 M 的距离,φ 为向量 $\boldsymbol{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角,P 为 M 在 xOy 面上的投影,θ 为从正 z 轴来看自 x 轴正向按逆时针方向转到向量 $\boldsymbol{OP}$ 的角,则(r,φ,θ)叫做点 M 的球面坐标(见图 4-5),其中

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

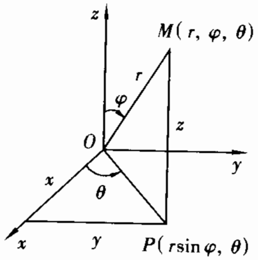


图 4-5

4.6 曲面与方程

1. 曲面方程

若曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z) = 0$$

有以下关系:

1° 曲面 S 上任一点 M 的坐标满足这个方程;

2° 坐标适合这个方程的所有点都在这曲面上.

则 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程,而曲面 S 叫做该方程的图形.如图 4-6 所示.

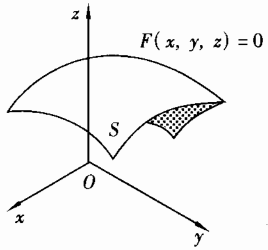


图 4-6

2. 几种特殊的曲面方程

1° 柱面方程 母线平行于坐标轴的柱面方程是一个二元方程.方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,而 $F(y,z)=0$ 与 $F(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

例如,方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面,其准线是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,而方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的平面(柱面),其准线是 xOz 面上的直线 $x-z=0$.

2° 旋转曲面方程 设 yOz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周,所得旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0,$$

而该曲线绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

其他情形可以类推.

例如,yOz 平面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕实轴 y 轴和虚轴 z 轴旋转一周所得双叶旋转双曲面和单叶旋转双曲面的方程为

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3° 锥面方程　以原点为顶点的锥面方程是 x,y,z 的齐次方程；以(a,b,c)为顶点的锥面方程是 $x-a,y-b,z-c$ 的齐次方程.

例如 $x^2+y^2=\tan^2\theta z^2$ 是顶点在原点，顶角为 2θ 的圆锥面.

4.7 空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可看作是两个曲面的交线，因此空间曲线的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

例如，xOy 面上圆心在原点，半径为 R 的圆的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\z=0,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\z=0.\end{cases}$$

2. 空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x,y,z 表示为参数 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b\\z=h(t),\end{cases}$$

就是空间曲线 C 的参数方程.

例如，图 4-7 所示的空间螺线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta<+\infty.\\z=b\theta,\end{cases}$$

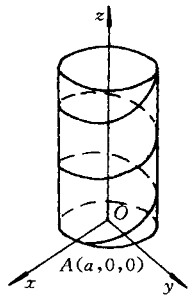


图 4-7

3. 空间曲线在坐标面上的投影

求空间曲线 C

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0;\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

在 xOy 面上的投影，只需从上述方程组中消去 z 得到 $f(x,y)=0$，方程

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$$

就是曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程. 类似地，可得曲线 C 在 yOz 面上及 zOx 面上的投影曲线.

5 空间中的平面与直线

5.1 平面及其方程

1. 平面的点法式方程

过一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的平面（见图 5-1）方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

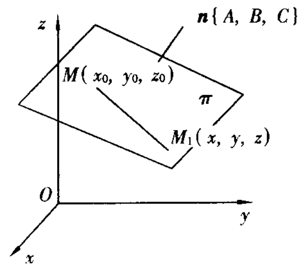


图 5-1

2. 平面的一般方程

任何一个 x,y,z 的一次方程的图形是平面；反之，任何一个平面的方程是 x,y,z 的一次方程.

$$Ax+By+Cz+D=0\quad (A,B,C \text{ 不同时为 } 0)$$

称为平面的一般方程. 其法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

当 $D=0$，则平面通过原点；

当 $A=0$，则平面平行于 x 轴；

当 $B=0$，则平面平行于 y 轴；

当 $C=0$，则平面平行于 z 轴；

当 $A=B=0$，则平面垂直于 z 轴；

当 $B=C=0$，则平面垂直于 x 轴；

当 $A=C=0$，则平面垂直于 y 轴.

3. 平面的截距式方程

若平面与 3 个坐标轴的交点为 $P_1(a,0,0)$，$P_2(0,b,0)$，$P_3(0,0,c)$，如图 5-2 所示，则平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

称此方程为平面的截距式方程.

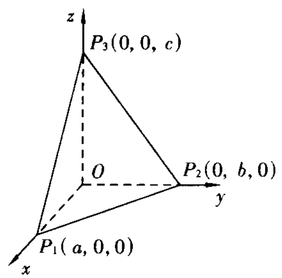


图 5-2

4. 点到平面的距离

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，则距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

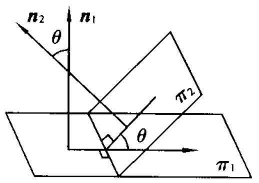


图 5-3

5. 两平面的夹角

称两非平行平面：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2)$的法向量之间的夹角 θ 为两平面间的夹角(见图 5-3)，所以有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

两平面垂直$\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

两平面平行$\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}.$

6. 两平行平面的距离

两平行平面 $Ax+By+Cz+D_i=0(i=1,2)$之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7. 有轴平面束 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，这条直线叫做平面束的轴. 以直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

为轴的有轴平面束方程为

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 l,m 为不全为 0 的任意实数.

5.2 空间直线及其方程

1. 空间直线的一般方程

空间直线可看作两平面的交线，因此空间直线(见图 5-4)方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中

$$A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq 0,$$

$$A_2^2+B_2^2+C_2^2\neq 0,$$

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

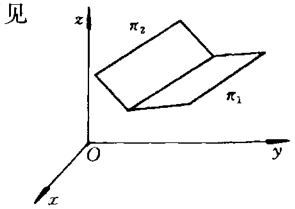


图 5-4

此方程称为直线的一般方程.

2. 空间直线的点向式(对称式)方程

平行于某直线 L 的非零向量$\{m,n,p\}$称为 L 的方向向量，m,n,p 称为 L 的一组方向数.

若直线 L 过 $M(x_0,y_0,z_0)$，且方向向量为$\{m,n,p\}$，如图 5-5 所示，则直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

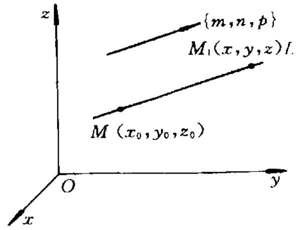


图 5-5

称此方程为直线的点向式(或对称式)方程.

若 m,n,p 中有为零的数出现，例如，$p=0$，则应理解为

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n},\\ z=z_0,\end{cases}$$

即直线位于

$$z=z_0$$

的平面上. 而

$$m=n=0,$$

则表示

$$\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0,\end{cases}$$

即直线与 z 轴平行.

3. 空间直线的参数方程

过 $M(x_0,y_0,z_0)$且方向向量为$\{m,n,p\}$的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

4. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1,L_2 的方向向量分别为$\{m_1,n_1,p_1\}$，$\{m_2,n_2,p_2\}$，则 L_1 与 L_2 间的夹角为

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

$$L_1\perp L_2\Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

$$\underset{(\text{或重合})}{L_1/\!/L_2}\Longleftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

5. 直线外一点到直线的距离

设直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$为直线外一点，则 M_1 到该直线的距离为

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

6. 两条异面直线的距离

设两条异面直线 L_1,L_2 的方程为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

则 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

7. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线 L 与 L 在平面上的投影直线间的夹角 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$称为该直线 L 与平面的夹角(见图 5-6)．直线垂直于平面，则规定

$$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

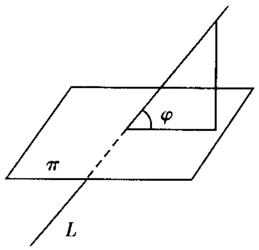


图 5-6

若直线的方向向量为$\{m,n,p\}$，平面的法向量为$\{A,B,C\}$，则

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

直线垂直于平面$\Longleftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

直线平行于平面(或直线在平面上)$\Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

6 二次曲面

6.1 椭球面

1. 椭球面的标准方程

以原点为中心，3 个半轴分别为 a,b,c 的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

其坐标面是椭球面的对称平面，坐标轴是它的对称轴，与坐标轴的 6 个交点$(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$是它的顶点．(参见第 7 章序号 38.)

2. 旋转椭球面

当 $a=b$ 时，即方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的椭球面是由 xOz 面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕 z 轴旋转而成；其余情况类推.

3. 球面

当 $a=b=c=r$ 时，方程 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示中心在原点，半径为 r 的球面．因此球面是椭球面的特例.

4. 椭球面与平面的截线

椭球面包含在由 6 个面 $x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$ 所围的长方体内．在此范围内用任一平面截椭球面，截线均为椭圆.

旋转椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$用垂直于 z 轴(旋转轴)的平面 $z=h(|h|<c)$去截，其截线为圆$\begin{cases} x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right), \\ z=h. \end{cases}$

6.2 双曲面

1. 单叶双曲面的标准方程

单叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中心在原点，关于各坐标面和各坐标轴对称，与 x 轴，y 轴分别交于$(\pm a,0,0)$，$(0,\pm b,0)$，与 z 轴不相交．(参见第 7 章序号 38.)

2. 单叶双曲面与平面的截线

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截上述单叶双曲面，其截线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 去截上述单叶双曲面，截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2},\\ y=k.\end{cases}$$

当 $|k|<b$ 时，截线为实轴平行于 x 轴的双曲线；当 $|k|>b$ 时，截线为实轴平行于 z 轴的双曲线；当 $|k|=b$ 时，截线为两条直线，这两条直线交于 $(0,b,0)$ 或 $(0,-b,0)$.

用平行于 yOz 面的平面 $x=k$ 截单叶双曲面，情形与用平面 $y=k$ 所截完全类似.

3. 双叶双曲面的标准方程

双叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

其中心在原点，关于各坐标面和各坐标轴对称，且与 x 轴，y 轴不交，但与 z 轴交于 $(0,0,\pm c)$. 又因为 $z^2\geqslant c^2$，因此曲面分为上、下两叶.（参见第 7 章序号 40）.

4. 双叶双曲面与平面的截线

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(|h|\geqslant c)$ 截上述双叶双曲面，其截线为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $|z|=h$ 时，椭圆退缩为一点.

用两坐标面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别截上述双叶双曲面，其截线分别为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0.\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面和 yOz 面的平面 $y=h(|h|\neq b)$，$x=k(|k|\neq a)$ 截上述双叶双曲面，截线也为双曲线.

6.3　抛　物　面

1. 椭圆抛物面的标准方程

椭圆抛物面的标准方程为

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

此曲面对称于 xOz 面和 yOz 面，z 轴为对称轴，$(0,0,0)$ 是顶点，由于 $z\geqslant 0$，因此曲面在 xOy 面上方.（参见第 7 章序号 42.）

2. 椭圆抛物面与平面的截线

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h>0)$ 截上述椭圆抛物面，截线为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 截上述椭圆抛物面，截线为抛物线

$$\begin{cases}x^2=a^2\left(z-\dfrac{k^2}{b^2}\right),\\ y=k.\end{cases}$$

当 $k=0$ 时，称截线 $\begin{cases}x^2=a^2z,\\ y=0\end{cases}$ 为主抛物线.

用平行于 yOz 面的平面 $x=k$ 截上述椭圆抛物面，情形与用平面 $y=k$ 所截类似.

3. 双曲抛物面的标准方程

双曲抛物面的标准方程为

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

此曲面（又称马鞍面）关于 xOz 面，yOz 面以及 z 轴对称，但无对称中心.（参见第 7 章序号 43.）

4. 双曲抛物面与平面的截线

用坐标平面 $y=0$ 和 $x=0$ 截上述双曲抛物面分别得抛物线

$$\begin{cases}x^2=a^2z,\\ y=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}y^2=-b^2z,\\ x=0,\end{cases}$$

称此抛物线为双曲抛物面的主抛物线.

用坐标平面 xOy 截上述双曲抛物面，截线为两条相交于原点的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0.\end{cases}$$

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h\neq 0)$ 截上述双曲抛物面，截线为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2h}-\dfrac{y^2}{b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

用平行于 xOz 面的平面 $y=k$ 截上述双曲抛物面，截线为抛物线

$$\begin{cases}x^2=a^2\left(z+\dfrac{k^2}{b^2}\right),\\ y=k.\end{cases}$$

6.4　二次锥面与二次柱面

1. 二次锥面的标准方程

二次齐次方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

表示顶点在原点，以 z 轴为轴的二次锥面.（参见第 7 章序号 44.）

由移动直线所构成的曲面称为直纹面，锥面是直纹面.

2. 二次锥面是双曲面的渐近面

过 z 轴的任一平面 π 与单叶双曲面或双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

的截线是双曲线，而 π 与上述二次锥面相截截出两条直线，这两条直线恰为双曲线的渐近线，因此，称上述二次锥面是单叶双曲面或双叶双曲面的渐近面.

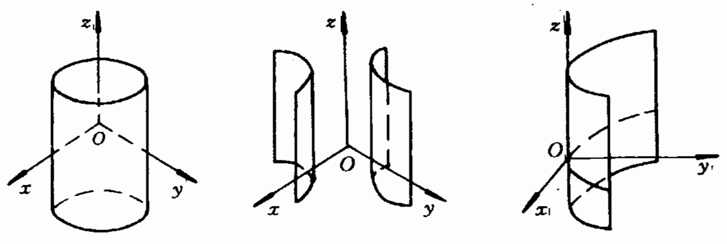
3. 二次柱面

二次柱面是直纹面，它有三种情形

1° 椭圆柱面(见图 6-1(a)) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

2° 双曲柱面(见图 6-1(b)) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

3° 抛物柱面(见图 6-1(c)) $\dfrac{x^2}{a^2}-py=0.$



(a) (b) (c)

图 6-1

6.5 二次曲面的一般方程及其讨论

1. 二次曲面的一般方程

由 x,y,z 的一般实系数二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+$$
$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

所确定的曲面都称二次曲面.

2. 二次曲面的分类

按上述二次曲面方程中系数所取的一切可能值，二次曲面可分为 17 种标准形状，其中

1° 椭球面 2 种(实的和虚的)；
2° 双曲面 2 种(单叶的和双叶的)；
3° 抛物面 2 种(椭圆的和双曲的)；
4° 二次锥面 2 种(实的和虚的)；

5° 二次柱面 9 种(准线为 9 种二次曲线).

3. 二次曲面的判定

在二次曲面的一般方程中，为判定已知曲面为何种曲面，特引进下列记号：

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$I_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix};$$

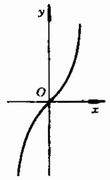
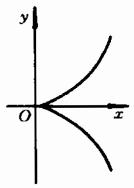
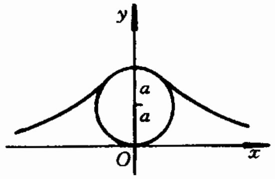
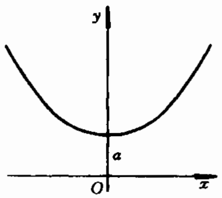
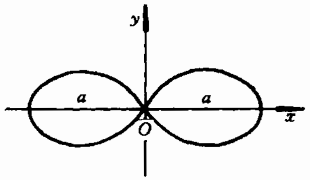
$$K_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{14}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{24}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

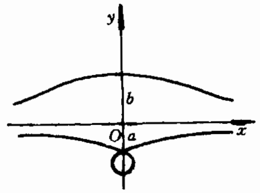
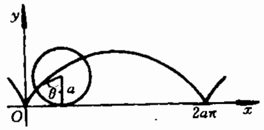
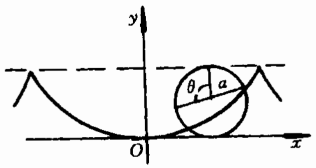
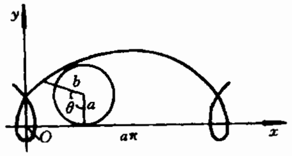
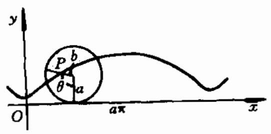
于是，有下列判定结果：

1° 椭球面 $I_2>0, I_1I_3>0, I_4<0$;
2° 虚椭球面 $I_2>0, I_1I_3>0, I_4>0$;
3° 点(或称虚母线二次锥面) $I_2>0, I_1I_3>0, I_4=0$;
4° 单叶双曲面 $I_3\neq 0, I_2\leqslant 0$(或 $I_1I_3\leqslant 0$), $I_4>0$;
5° 双叶双曲面 $I_3\neq 0, I_2\leqslant 0$(或 $I_1I_3\leqslant 0$), $I_4<0$;
6° 二次锥面 $I_3\neq 0, I_2\leqslant 0$(或 $I_1I_3\leqslant 0$), $I_4=0$;
7° 椭圆抛物面 $I_3=0, I_4<0$;
8° 双曲抛物面 $I_3=0, I_4>0$;
9° 椭圆柱面 $I_3=I_4=0, I_2>0, I_1K_2<0$;
10° 虚椭圆柱面 $I_3=I_4=0, I_2>0, I_1K_2>0$;
11° 直线 $I_3=I_4=K_2=0, I_2>0$;
12° 双曲柱面 $I_3=I_4=0, I_2<0, K_2\neq 0$;
13° 一对相交平面 $I_3=I_4=K_2=0; I_2<0$;
14° 抛物柱面 $I_4=I_3=I_2=0, K_2\neq 0$;
15° 一对平行平面 $I_3=I_4=I_2=K_2=0, K_1<0$;
16° 一对虚平行平面 $I_3=I_4=I_2=K_2=0, K_1>0$;
17° 一对重合平面 $I_3=I_4=I_2=K_2=K_1=0.$

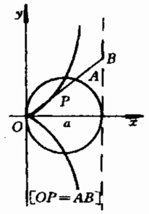
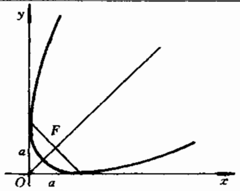
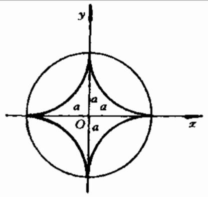
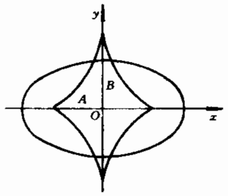
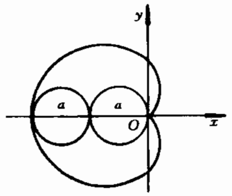
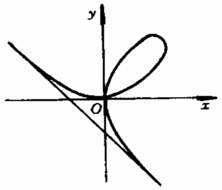
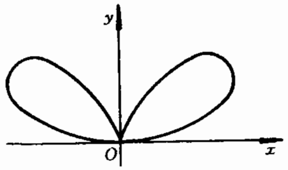
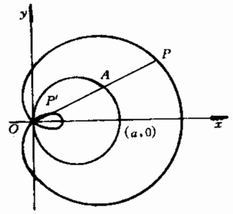
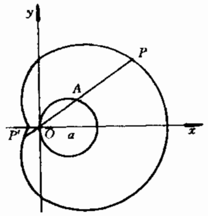
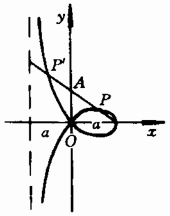
7 各种重要图形与方程

序号	名 称	图 形	方 程
1	三次抛物线		$y = ax^3$ $\rho^2 = \frac{1}{a}\sec^2\theta\tan\theta$
2	半三次抛物线		$y^2 = ax^3$ $\rho = \frac{1}{a}\tan^2\theta\sec\theta$
3	箕舌线		$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ $\begin{cases} x = 2a\cot\theta \\ y = 2a\sin^2\theta \end{cases}$
4	悬链线		$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ $= a\cosh\frac{x}{a}$
5	双纽线		$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

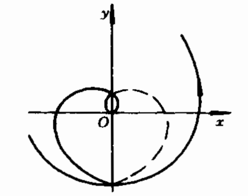
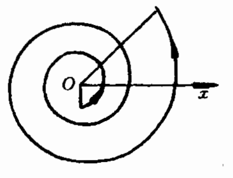
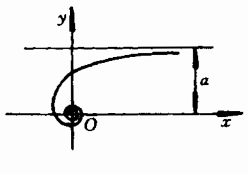
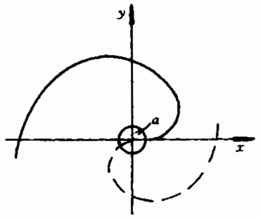
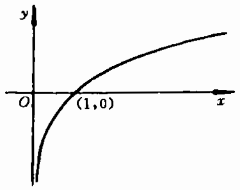
续表

序号	名 称	图 形	方 程
6	蚌线		$(y+a)^2(b^2-y^2) = x^2y^2$, $(b>a)$ $\rho = a\csc\theta + b$ 或 $\rho = a\csc\theta - b$ (极点为 $(0, -a)$，极轴与 x 轴方向一致)
7	旋轮线(正常形)(摆线)		$x = a\arccos\frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay-y^2}$ $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ 每段曲线，长度 = $8a$ 面积 = $3\pi a^2$
8	旋轮线		$x = 2a\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}} \pm \sqrt{2ay-y^2}$ $\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$
9	长辐旋轮线		$x = a\theta - b\sin\theta$ $y = a - b\cos\theta$ $a < b$
10	短辐旋轮线		$x = a\theta - b\sin\theta$ $y = a - b\cos\theta$ $a > b$

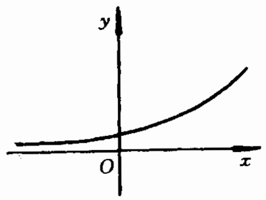
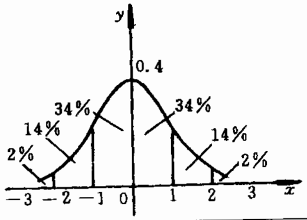
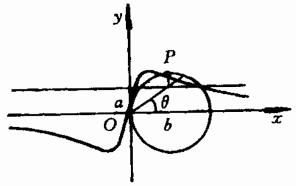
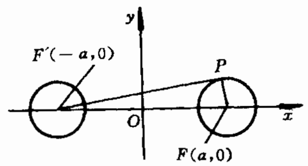
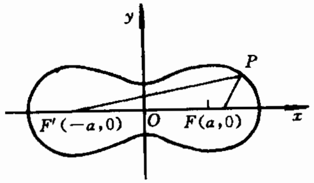
续表

序号	名　称	图　形	方　程
11	蔓叶线		$y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$ $\rho=a(\sec\theta-\cos\theta)$ $=a\sin\theta\tan\theta$
12	抛物线		$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$
13	星形线		$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\y=a\sin^3\theta\end{cases}$
14	椭圆的渐屈线		$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$ $\begin{cases}x=A\cos^3\theta, Aa=a^2-b^2\\y=B\sin^3\theta, Bb=a^2-b^2\end{cases}$
15	心脏线		$(x^2+y^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2)$ $\rho=a(1-\cos\theta)$
16	叶形线		$x^3+y^3-3axy=0$ $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$ $\rho=\dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$
17	双叶形线		$(x^2+y^2)^2=ax^2y$ $\rho=a\sin\theta\cdot\cos^2\theta$
18	蚶线		$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$ $\rho=b+a\cos\theta$ $(P'A=AP=b)$ 图中 $a>b$
19	蚶线		和 18 相同，仅 $a<b$
20	绳结线		$y^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$ $\rho=a\cos2\theta\sec\theta$

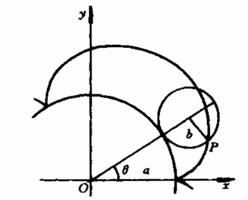
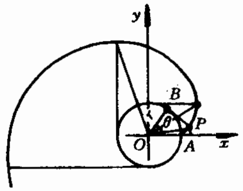
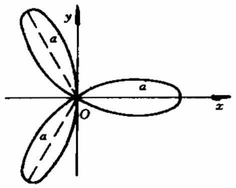
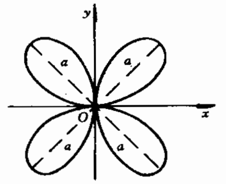
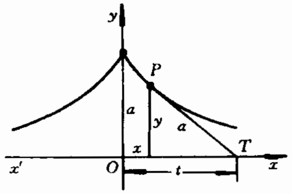
续表

序号	名　称	图　形	方　程
21	阿基米德螺线		$(x^2+y^2)=a^2(\arctan\frac{y}{x})^2$ $\rho=a\theta$　或　$\rho=-a(\theta\pm\pi)$
22	对数或等角螺线		$x^2+y^2=e^{2a(\arctan\frac{y}{x})}$ $\rho=-e^{a(\theta\pm\pi)}$ $\rho=e^{a(\theta\pm2\pi)}$等等 $\ln\rho=a\theta$ 或 $\ln(-\rho)=a(\theta+\pi)$等等
23	双曲或倒数型螺线		$(x^2+y^2)(\arctan\frac{y}{x})^2=a^2$ $\rho\theta=a$ 或 $\rho(\theta\pm\pi)=-a$ 或 $\rho(\theta\pm2\pi)=a$
24	抛物型螺线		$(\rho-a)^2=4ak\theta$
25	对数曲线		$y=\log_a x$

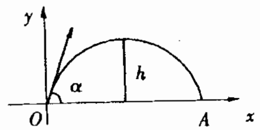
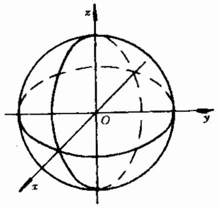
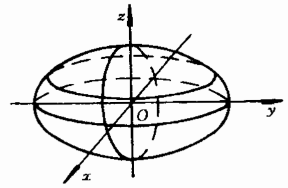
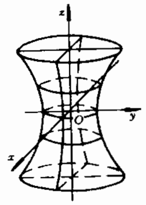
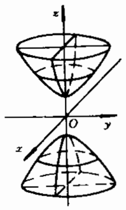
续表

序号	名　称	图　形	方　程
26	指数曲线		$y=a^x$
27	概率曲线		$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
28	蛇形线		$y=\frac{abx}{a^2+x^2}$ $\begin{cases}x=a\cot\theta\\y=b\sin\theta\cos\theta\end{cases}$
29	卵形线		$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=c^4$ 图中表示 $a>c$ 的情况
30	卵形线		方程和 29 号曲线相同， 仅式中 $a<c$

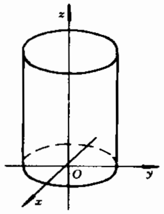
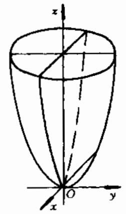
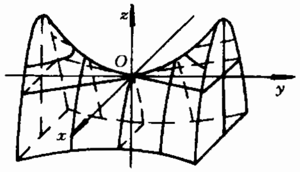
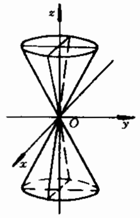
续表

序号	名 称	图 形	方 程
31	圆外旋轮线		$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\frac{a+b}{b}\theta$ $y=(a+b)\sin\theta-b\sin\frac{a+b}{b}\theta$
32	圆的渐开线		$\begin{cases}x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta\\y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta\end{cases}$
33	三叶玫瑰线		n 为奇数时,图形有 n 个叶片 $\rho=a\cos n\theta$ 图中 $n=3$,即 $\rho=a\cos3\theta$
34	四叶玫瑰线		n 为偶数时,图形有 $2n$ 个叶片 $\rho=a\sin n\theta$ 图中 $n=2$,即 $\rho=a\sin2\theta$
35	曳物线		$x=a\,\mathrm{arcsech}\frac{y}{a}-\sqrt{a^2-y^2}$ 或 $x=t-a\tanh\frac{t}{a}, y=a\,\mathrm{sech}\frac{t}{a}$ 当长度为 a 的切线 PT 的 T 点在 x 轴上移动时 P 点所成的轨迹

续表

序号	名 称	图 形	方 程
36	抛射轨道线		$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ $\begin{cases}x=(v_0\cos\alpha)t\\y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}\end{cases}$ 其中:v_0 = 初速,m/s g = 重力加速度 = 9.8m/s² t = 时间,s α = 仰射角
37	球面		$x^2+y^2+z^2=a^2$
38	椭球面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
39	单叶双曲面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
40	双叶双曲面		$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

续表

序号	名　称	图　形	方　程
41	椭圆柱面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
42	椭圆抛物面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$
43	双曲抛物面		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$
44	椭圆锥面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

索　引

使用说明：1. 本索引收录了本卷正文中用黑体排印的大部分术语。

2. 术语依第一字的读音按汉语拼音字母表顺序排列。如果拼音相同，根据音调，按阴平、阳平、上声、去声、轻声的次序排列。如果音和音调也相同，按总笔画数排列。

3. 以符号、数字或字母起首的术语，按符号、数字、拉丁字母、希腊字母的顺序，分别集中排在以汉字起首的术语前面，其中字母依首写字母按字母的顺序排列。

4. 以数学家译名为首的术语(例如，傅里叶变换)，依译名按汉字的排法排列。

5. 术语后面的数字，表示该术语出现在本书中的页码。

以拉丁字母起首的术语

以希腊字母起首的术语