目　录

1 数集的扩张 …………………… (907)
1.1 集合简介 …………… (907)
1.2 自然数集 …………… (908)
1.3 整数集 ……………… (909)
1.4 有理数集 …………… (910)
1.5 实数集 ……………… (911)
1.6 复数集 ……………… (913)
2 多项式 ……………………… (914)
2.1 单项式与多项式的概念 ……………………… (915)
2.2 多项式的运算 ……… (916)
2.3 多项式的可除性 …… (916)
2.4 多项式的因式分解 … (917)
2.5 插值公式 …………… (918)
2.6 有穷数列及其求和 … (918)
3 分式与根式 ………………… (922)
3.1 比和比例 …………… (922)
3.2 有理分式 …………… (924)
3.3 部分分式 …………… (925)
3.4 根式 ………………… (926)
3.5 指数式与对数式 …… (928)
4 方程与不等式 ……………… (929)
4.1 方程的概念 ………… (929)
4.2 方程的解法 ………… (930)
4.3 不等式 ……………… (936)

1 数集的扩张

1.1 集合简介

1. 集合概念

把确定的互相可以区别的一些事物合并起来,看成一个整体,就称为一个集合(简称集),其中各事物称为该集合的元素.元素 a 属于集合 S,记为 $a\in S$.只有有限个元素的集合称为有穷集合,否则称为无穷集合.

集合由它的全体元素所确定,常用{ }号将这些元素括起来表示这个集合,例如 $A=\{1,2,3,4\}$;或者列举全体元素具有的某一性质 $P(x)$ 加以概括,例如 $A=\{x\mid P(x)\}=\{x\mid x$ 是小于 5 的自然数$\}$.

没有任何元素的集合,叫做空集.通常记为 $\varnothing$.

2. 集合的关系

如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素,就称 B 为 A 的子集,或 A 包含 B,记为 $B\subset A$.任一集合 A 是它自己的子集,有 $A\subset A$. A 的异于自身的子集 B 叫做 A 的真子集,记为 $B\subsetneqq A$.

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称 $A=B$.

包含关系具有传递性,即 $A\supset B,B\supset C\Rightarrow A\supset C$.

一个集合也可以以其他集合为元素,形成集合的集合.

3. 集合的运算

1° 并(集)　A,B 集合的并(集)记为 $A\cup B$,其元素由属于 A 或属于 B 的元素组成(相同的元素在并集中只出现一次).

2° 交(集)　A,B 集合的交(集)记为 $A\cap B$,其元素由属于 A 且属于 B 的元素组成.

3° 差(集)　A,B 集合的差(集)记为 $A\setminus B$,其元素由属于 A 而不属于 B 的元素组成.

并与交运算分别服从交换律、结合律,且共同服从分配律.

4. 映射

1° 设 A,B 是两个非空集合,f 是一个确定的法则.对于每一个 $a\in A$,根据这个法则,有且仅有一个 $b\in B$ 与之对应,则称 f 为一个从 A 到 B 的映射,记为

$$f:A\to B\quad(\text{或 } A\xrightarrow{f}B)$$

b 叫做 a 在 f 的作用下的像,记为 $b=f(a)$;a 叫做 b 在 f 的作用下的一个原像.这里集合 A 称为 f 的原像集,或者 f 的定义域,记为 $\mathrm{dom}(f)$.对于所有的 $a\in A$,取和 a 相对应的 b 的全体组成 B 的一个子集,称为 f 的像集,或者 f 的值域,记为 $\mathrm{ran}(f)$.

2° 若 $a_1 \in A, a_2 \in A$，当 $a_1 \neq a_2$ 时，有 $b_1 = f(a_1) \neq b_2 = f(a_2)$，$b_1, b_2 \in B$，则称 f 是从 A 到 B 的一个单射；若在映射 f 下，B 的每一个元素都至少是 A 中某一个元素的像，即 $B = \mathrm{ran}(f)$，则称 f 是从 A 到 B 的一个满射. 若 f 既是单射又是满射，则称 f 是从 A 到 B 的一个双射，也叫单满射，或称一一映射.

3° 设 $f: A \to B$ 是从 A 到 B 的一一映射，g 是一个法则，使得对于每个 $b \in B$，都有 b 在 A 中的原像 a 与之对应，则称 g 为映射 $f: A \to B$ 的逆映射，记作 $g: B \to A$. 显然 f 与 g 两者互为逆映射. 通常记 g 为 f^{-1}，或 f 为 g^{-1}. 显然 $(f^{-1})^{-1} = f$.

4° 如果集合 A 与集合 B 可以作成一一映射，则说 A 对等于 B，记作 $A \sim B$. 也说这两个集有相同的基数(或称势)，即这两个集等势.

5° 若 X 与 Y 是数集，将映射 $f: X \to Y$ 称为定义于 X 上的一个函数 f，常记为 $f(x)(x \in X)$.

1.2 自 然 数 集

1. 基数理论

诺伊曼(Neumann)从空集出发，定义扩大了的自然数(含零)如下：

$0 = \varnothing$,	即 $0 = \varnothing$;
$1 = \{\varnothing\}$,	即 $1 = \{0\}$;
$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,	即 $2 = \{0, 1\}$;
$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,	即 $3 = \{0, 1, 2\}$.

按此定义，每个自然数都是一个集. 若 l, m 是两自然数. 则下面关系有且仅有一个成立

$$l < m, l = m, l > m.$$

若 L 为任一集，但 $L \sim l$，则称 L 的基数为 l. 若又有任一集 $M, M \sim m$，且 $L \cap M = \varnothing, L \cup M = N, N \sim n$，则称 n 为 l 与 m 之和，记为 $l + m = n$. 可以证明，这种加法适合交换律和结合律. 由结合律可知 m 个 l 相加的结果是唯一的，并可记为 $d = l + l + \cdots + l = ml$，$d$ 称为 m, l 的积. 亦可证此乘法适合交换律、结合律及乘法对加法的分配律.

2. 序数理论

定义集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做自然数，如果 $\mathbf{N}$ 的元素间有一个基本关系"后继"(用 $^+$ 来表示)，则满足下列公理：

1° $1 \in \mathbf{N}$.

2° $\forall a \in \mathbf{N}$，有唯一的 $a^+ \in \mathbf{N}$.

3° $\forall a \in \mathbf{N}$，a^+ 不是 1.

4° $\forall a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$，若 $a^+ = b^+$，则 $a = b$.

5° (归纳公理) 若 $M \subset \mathbf{N}$，且 $1 \in M$；或者 $\forall a \in M$，有 $a^+ \in M$，则 $M = \mathbf{N}$.

用 2 表示 1^+，3 表示 2^+，…，则可以把 $\mathbf{N}$ 的全部元素排列为 $1, 2, 3, \cdots, n, n^+, \cdots$. 这样的自然数称为序数.

定义 自然数的加法是一种关系"+"，使得 $\forall a, b \in \mathbf{N}$，有唯一确定的 $a + b \in \mathbf{N}$，并且

1° $a + 1 = a^+$;

2° $a + b^+ = (a + b)^+$.

进而，对任意两个自然数 a, b，可以规定它们的顺序，即若存在 $k \in \mathbf{N}$，使得 $a = b + k$，则称 $a > b$，也说 $b < a$.

自然数的离散性：任意两个相邻的自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b，使 $a < b < a^+$.

定义 自然数的乘法是一种对应关系"·"，使得 $\forall a, b \in \mathbf{N}$，有唯一确定的 $a \cdot b \in \mathbf{N}$，并且

1° $a \cdot 1 = a$;

2° $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$.

由定义可知，自然数集 $\mathbf{N}$ 对加法和乘法都是封闭的.

定义 自然数的减法：设 $a, b \in \mathbf{N}$，若存在 $x \in \mathbf{N}$，使 $b + x = a$，则称 x 为 a 减去 b 的差，记作 $a - b$. 这里 a 叫被减数，b 叫减数. 求两数差的运算叫减法.

定义 自然数的除法：设 $a, b \in \mathbf{N}$，若存在 $x \in \mathbf{N}$，使 $b \cdot x = a$，则称 x 为 a 除以 b 的商，记作 a / b. 这里 a 叫被除数，b 叫除数. 求两数商的运算叫做除法.

自然数集对减法和除法不是封闭的.

3. 代数系统(代数结构)

设 S 是一个非空集合，如果存在一个法则 $*$，使 S 中的任意两个元素有 S 中唯一确定的元素与它们对应，就说 $*$ 是 S 的代数运算，S 对 $*$ 构成代数系统(或称 S 对于运算 $*$ 成一个代数结构)，记为 $(S, *)$. S 对运算 $*$ 是封闭的.

因此，自然数集 $\mathbf{N}$ 对 + 或对 · 分别构成代数系统. $(N, +)$ 与 $(N, \cdot)$ 都是可交换的半群.

1.3 整 数 集

自然数集 $\mathbf{N}$ 虽然对 +(加法)和 ·(乘法)两种运算封闭，但对加法缺乏单位元素 0，也缺乏逆元素(例如，$\forall a \in \mathbf{N}$，找不到逆元素 a' 使得 $a + a' = a' + a = 0$)；对乘法虽然有单位元素 1，却缺乏逆元素(例如，$\forall a \in \mathbf{N}$，找不到逆元素 a' 使得 $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$). 所以 $(\mathbf{N}, +)$ 和 $(\mathbf{N}, \cdot)$ 都只是半群.

1. $(\mathbf{Z}, +)$交换群

将自然数集扩张为整数集 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^+$，这里 $\mathbf{Z}^+$ 称为正整数集，即 $\mathbf{N}$；$\mathbf{Z}^-$ 称为负整数集，由 $\mathbf{N}$ 的元的加法逆元全体组成。则 $(\mathbf{Z}, +)$ 成为交换群.

2. $(\mathbf{Z}, \cdot)$半群

$(\mathbf{Z}, \cdot)$ 是半群，因为 $\mathbf{Z}$ 中虽有单位元素 1，却没有逆元素.

3. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$环

环是具有两个运算(加法和乘法)的代数系统，而且对加法是一个交换群，对乘法是一个半群，乘法对加法的左右分配律成立. 整数集 $\mathbf{Z}$ 同时满足这 3 个条件，而且适合乘法交换律，所以整数集 $\mathbf{Z}$ 是交换环.

4. 带余除法

1° 若 $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}_0 (\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z} \setminus \{0\})$，则有且只有一对整数 q 与 r，使得

$$a = bq + r,\quad 0 \leqslant r < |b|.$$

如果 $r = 0$,就是 b 整除 a,记作 $b \mid a$.

2° 若整数 $g > 1$,则任一正整数 a 能够唯一地表示为

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0,$$

这里整数 $n \geqslant 0, a_i \in \mathbf{Z}$,且 $0 \leqslant a_i \leqslant g, i = 0,1,\cdots,n$.

这个式子表明,只要用 g 个数码就可以表示任何正整数,这时 a 的 g 进制表示法可以简记为 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$.

5. 最大公因数与最小公倍数

1° 最大公因数　若 $d \mid a_i, i = 1,2,\cdots,n, n \geqslant 2$,则称 d 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公因数.又因为不全为零的整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公因数只有有限个,其中必有最大数,这个最大数就叫做这 n 个整数的最大公因数,记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

2° 互素　若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$,则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互素.如果其中每两个数都互素,就说它们两两互素.

3° 最小公倍数　若 $a_i \mid m, i = 1,2,\cdots,n, n \geqslant 2$,则称 m 是这 n 个数的公倍数.非零整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一切正公倍数组成的非空集合中必有最小正数,这个最小正数就叫做这 n 个非零整数的最小公倍数,记作 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

6. 素数与合数

1° 素数与合数　如果大于 1 的整数 p 仅有两个正因数 1 与 p,就说 p 是素数;如果正整数 n 有多于两个的正因数,就说 n 是合数.

2° 算术基本定理　每个大于 1 的整数都可以唯一地分解成素因数的乘积(不计因数的顺序),这就是算术基本定理.

这个定理表明 a 有标准分解式

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是相异素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}, i = 1,2,\cdots,k$.

1.4　有理数集

整数集对除法运算不封闭,有必要再加以扩张.

1° 有理数　形如 $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}_0)$ 的数叫有理数.当 $b \mid a$ 时它是整数;当 $b \nmid a$ 时,它是分数.

2° 有理数集　有理数集用集合表示为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-,$$

其中　$$\mathbf{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbf{N} \right\},\quad \mathbf{Q}^- = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; -a, b \in \mathbf{N} \right\}.$$

设 $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}, b_1, b_2 \in \mathbf{Z}_0$.当 $a_1 b_2 = a_2 b_1$ 时,$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{加法} & \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}, \\ \text{乘法} & \dfrac{a_1}{b_1} \cdot \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1 a_2}{b_1 b_2}, \end{array}\right\} \text{适合交换律、结合律和分配律}$$

减法　$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2},$$

除法　$$\frac{a_1}{b_1} \bigg/ \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \quad (a_2 \neq 0).$$

有理数的绝对值 $\left|\frac{a}{b}\right|$ 分别规定为 $\frac{a}{b}$ $\left(当 \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}^+\right)$, 0 $\left(当 \frac{a}{b} = 0\right)$, $-\frac{a}{b}$ $\left(当 \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}^-\right)$.

若 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 都是有理数,且 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ 是正有理数,则 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

3° 有理数域　域是具有加法和乘法运算的代数系统,它至少含有两个不同的元素 0 和 1,并且对加法是交换群,对乘法(除 0 以外)也是交换群,且乘法对加法的分配律成立.

有理数集 $\mathbf{Q}$ 符合上述条件,所以是有理数域.

域是环的特例(子集),所以有理数集也是有理数环.

4° 有理数体　若上述乘法运算的交换律不成立,则该代数系统称为非交换域.域和非交换域合称体(又叫除环).因此有理数域又是有理数体.

5° 分数与十进小数

凡既约真分数总可以化为有限小数或无限循环小数.假分数是整数与真分数的和,它的既约真分数部分当然也如此.

1.5　实　数　集

1. 无理数

把不能表示为有理数(分数)的数称为无理数.

无限不循环小数是无理数.

2. 实数

称十进小数

$$a = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

为实数,这里 a_0 是整数,$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是小于 10 的非负整数.

实数集是有理数集与无理数集的并集.

实数集 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^-$,即包括正实数、负实数和零.

两个实数 $\alpha = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \beta = b_0.\, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ 可以通过比较它们小数点前后相应数位数字的大小而判定大小,因而实数集是有序集.

若 $\alpha < \beta$,总有某个 k,使 $a_k < b_k$,这时取有理数 $b = b_0.\, b_1 b_2 \cdots b_k$,则 $\alpha < b \leqslant \beta$;又不妨设 $a_{k+l} \neq 9$,置 $a'_{k+l} > a_{k+l}$,作有理数 $a = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots a_{k+l-1} a'_{k+l}$,于是 $\alpha < a < b \leqslant \beta$.可见在两个实数 α, β 之间有无限多个有理数.又,在 a 的 a'_{k+l} 之后可任意添加无限不循环的数码构成无限多个无理数,它们仍在 a, b 之间也即仍在 α, β 之间.所以实数具有稠密性.

对于实数 $\alpha = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$,可以写出它的精确到 $1/10^n$ 的不足近似值 $\alpha_n^- = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_n$ 和过剩近似值 $\alpha_n^+ = a_0.\, a_1 a_2 \cdots a_n + 1/10^n$,这样,总是有 $\alpha \in [\alpha_n^-,$

$\alpha_n^+]$, $n=0,1,2,\cdots$. 只要控制 n 的大小就可以用有理数 α_n^- 和 α_n^+ 形成的闭区间套来达到 α 的任意精确程度.

3. 实数的四则运算

1° 加法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,且 $\alpha_n^-+\beta_n^-\leqslant\gamma<\alpha_n^++\beta_n^+$, $n=0,1,2,\cdots$,则称 γ 为 α 加上 β 的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$. 加法满足交换律、结合律.

实数集 $(\mathbf{R},+)$ 有唯一的零元 0.

2° 减法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,若有 $x\in\mathbf{R}$,使 $\beta+x=\alpha$,则称 x 为 α 减去 β 的差,记为 $x=\alpha-\beta$. 且 x 是唯一的,并且 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

3° 乘法 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^+$,且 $\alpha_n^-\cdot\beta_n^-\leqslant\gamma<\alpha_n^+\cdot\beta_n^+$, $n=0,1,2,\cdots$,则称 γ 为 α 乘以 β 的积,记为 $\gamma=\alpha\cdot\beta$; 而且 $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$; $(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$; $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$. 实数乘法满足交换律、结合律.

实数集 $(\mathbf{R},x)$ 有唯一单位元 1.

任取 $\alpha\in\mathbf{R}_0$ $(\mathbf{R}_0=\mathbf{R}\setminus\{0\})$,有唯一的 $\beta\in\mathbf{R}$,使 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$,这里 β 叫做 α 的逆元,记为 α^{-1}.

4° 除法 设 $\alpha\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}_0$,若有 $x\in\mathbf{R}$,使 $\beta x=\alpha$,则称 x 为 α 除以 β 的商,记为 $x=\frac{\alpha}{\beta}$. 且 x 是唯一存在的,并且 $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\alpha\cdot\beta^{-1}$.

5° 乘方 设 $\alpha\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z}$,则规定实数的整数指数幂为

$$\alpha^n=\begin{cases}\alpha, & n=1;\\ \alpha^{n-1}\alpha, & n>1;\\ 1, & n=0,\alpha\neq 0;\\ \dfrac{1}{(\alpha^{-1})^n}, & n<0,\alpha\neq 0.\end{cases}$$

此外 $\alpha^m\alpha^n=\alpha^{m+n}$; $(\alpha^m)^n=\alpha^{mn}$; $(\alpha\beta)^n=\alpha^n\beta^n$.

4. 实数域

实数乘法对加法的分配律成立. 而且 $(\mathbf{R},+)$, $(\mathbf{R}_0,\cdot)$ 都是交换群,所以 $\mathbf{R}$ 是数域. 当然, $\mathbf{R}$ 也是数体.

若 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$,则

1° 三歧性 $\alpha>\beta,\alpha=\beta,\beta>\alpha$ 三者有一个且只有一个成立.

2° 传递性 若 $\alpha>\beta,\beta>\gamma$,则 $\alpha>\gamma$.

3° 单调性 若 $\alpha>\beta$,则 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

4° 保向性 若 $\alpha>\beta,\gamma>0$,则 $\alpha\gamma>\beta\gamma$.

由 4°还可推出

5° 变向性 若 $\alpha>\beta,\gamma<0$,则 $\beta\gamma>\alpha\gamma$.

实数 $\mathbf{R}$ 是有序域.

5. 实数的开方

若 $n\in\mathbf{Z},n>1,\alpha\in\mathbf{R}$,则称适合 $x^n=\alpha$ 的实数 x 为 α 的 n 次方根. 求方根的运算叫做开方.

负实数的偶次方根不存在,因为任何实数的偶次方都不是负数.

若 $\alpha\geqslant 0$,整数 $n>1$,则有且只有一个非负实数 x,使 $x^n=\alpha$. x 称为 α 的 n 次算术根,记为 $x=\sqrt[n]{\alpha}$.

正实数 α 的偶次实方根有两个值 x 和 $-x$,可以用 $\pm\sqrt[n]{\alpha}$ 表示.

非正实数 α 的奇次实方根是唯一的非正实数 $\sqrt[n]{\alpha}$.

1.6 复 数 集

实数域对开方运算不封闭,有必要继续加以扩张.

1. 复数集

集合 $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 叫做复数集,其中每个元素 (x,y) 是实数序偶(即有序的实数对),称为复数. 复数集记为 $\mathbf{C}$.

x 叫做复数 (x,y) 的实部,记为 $x=\mathrm{Re}(x,y)$;

y 叫做复数 (x,y) 的虚部,记为 $y=\mathrm{Im}(x,y)$.

若两个复数相等则它们的实部相等、虚部也相等. 即 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2$.

2. 复数的代数形式及四则运算

称 $z=x+y\mathrm{i}$ $(x,y\in\mathbf{R})$ 为复数的代数形式,其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

1° 加法 $(x_1+y_1\mathrm{i})+(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i}$

加法满足交换律、结合律.

2° 减法 $(x_1+y_1\mathrm{i})-(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\mathrm{i}$.

复数有零元 $0+0\mathrm{i}$; 复数 $x+y\mathrm{i}$ 的负元是 $-x-y\mathrm{i}$.

3° 乘法 $(x_1+y_1\mathrm{i})\cdot(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$.

乘法满足交换律、结合律.

4° 除法 $\dfrac{(x_1+y_1\mathrm{i})}{(x_2+y_2\mathrm{i})}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}$.

若复数 $x+y\mathrm{i}\in\mathbf{C}_0$ (即 $x+y\mathrm{i}\neq 0+0\mathrm{i}=0$),则 $\dfrac{x+y\mathrm{i}}{x+y\mathrm{i}}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{xy-xy}{x^2+y^2}\mathrm{i}=1+0\mathrm{i}=1$ 称为 $\mathbf{C}$ 的单位元.

任取 $(x+y\mathrm{i})\in\mathbf{C}_0$,可以发现 $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$ 是 $x+y\mathrm{i}$ 的逆元,记为 $(x+y\mathrm{i})^{-1}$,有 $(x+y\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})^{-1}=1+0\mathrm{i}=1$.

规定 $x+0\mathrm{i}=x$, $0+1\mathrm{i}=\mathrm{i}$.

此外 $\mathrm{i}^{4m}=1$, $\mathrm{i}^{4m+1}=\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4m+2}=-1$, $\mathrm{i}^{4m+3}=-\mathrm{i}$, $m\in\mathbf{Z}$.

$x+y\mathrm{i}$ 的共轭复数是 $x-y\mathrm{i}$.

3. 复数的三角形式及乘方开方运算

1° 复数 $z=x+y\mathrm{i}=\sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{i}\right)=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

叫做复数的三角形式,这里 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数 z 的模,由 $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$, $\sin\theta$

$=\frac{y}{|z|}$联立确定的 θ 称为复数 z 的辐角.

2° 棣莫弗(de Moivre)公式　$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,n\in\mathbf{N}$.

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

3° 开方　$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),k=0,1,2,\cdots,n-1$.

记$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\varepsilon_k,k=0,1,2,\cdots,n-1$,其中 ε_k 是 1 的 n 次方根,简称 n 次单位根,有且只有 n 个值$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$.这 n 个值可以由其中某一 ε_k 的整数指数幂表示出来,这样的 ε_k 叫做一个 n 次原根.

例如　复数 $1+0\mathrm{i}$ 的三次方根分别是 $\varepsilon_0=1+0\mathrm{i},\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.可以充当三次原根的是 ε_1 和 ε_2.事实上,$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2,\varepsilon_1^3=\varepsilon_1^0=1;\varepsilon_2^2=\varepsilon_1,\varepsilon_2^3=\varepsilon_2^0=1$.

4. **复数集与实数域的关系**

由 $x+0\mathrm{i}=x$ 知,虚部为零的复数就是实数,所以实数域 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

复数 $x+y\mathrm{i}$,当 $y\neq0$ 时叫做虚数;当 $x=0,y\neq0$ 时叫做纯虚数.

$(\mathbf{C},+),(\mathbf{C},\cdot)$都是交换群,又 $\mathbf{C}$ 中乘法对加法的分配律成立,所以$(\mathbf{C},+,\cdot)$是数域.

复数乘方的代数式可以按二项式定理求得,如$(x+y\mathrm{i})^2=x^2+2xy\mathrm{i}+y^2\mathrm{i}^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$.复数开方的代数式一般无法写出,这里仅介绍平方根情形

如 $z=x+y\mathrm{i}$,则$\sqrt{z}=\sqrt{x+y\mathrm{i}}=z_1$ 或 z_2.

$$z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}+y\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}};$$

$$z_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}-y\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}}.$$

复数不能比较大小,复数域 $\mathbf{C}$ 不是有序域.

2　多　项　式

代数式就是以字母的有限次的加、减、乘、除的四则运算和指数为有理数的乘方运算(含开方运算)构成的解析式.

解析式中的字母分为两类,一类是在其容许值范围内任意取值的,叫自变数(量);另一类是当自变数(量)任意取值时保持相对固定值的,叫参变数(量).

解析式的自变数的所有容许值的集,叫做解析式(以及由它所定义的函数)的定义域.

如果两个解析式有相同的定义域,而且对于自变数的所有容许值组都有相同的数值,就说它们是恒等的.如 x^2-y^2 与$(x+y)(x-y)$.

如果两个解析式的定义域不同,但在它们的公共部分上两个解析式恒等,就说它们是在公共定义域上恒等的.如$\frac{x^2-1}{x-1}$与 $x+1$.

一个解析式用另一个与它恒等的表达式去代换时,叫做恒等变形.

2.1　单项式与多项式的概念

1. **单项式**

1° 单项式　由数值系数与自变数(它们都在数域 F 上取值)的非负整幂所构成的乘积

$$Ax^ky^l\cdots z^q$$

叫做自变数 $x,y,\cdots,z$ 在数域 F 上的单项式.显然其值也属于 F.

2° 单项式的次数　$Ax^ky^l\cdots z^q$ 中幂指数的和 $k+l+\cdots+q$ 叫做该单项式的次数.

3° 同类(相似)单项式　如果数域 F 上的两个具有相同自变数的单项式仅有系数的不同,则称这两个单项式为同类(相似)单项式,或同类项.

2. **多项式**

1° 多项式　由自变数与数字(它们都在数域 F 上取值)所组成的,仅经加法及乘法运算所得到的解析表达式叫做数域 F 上的有理整式或多项式.显然其值也属于 F.

2° 多项式的标准形式　经合并同类项,可以得到如下标准形式

$$P(x,y,\cdots,z)=A_1x^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{q_2}+\cdots+A_sx^{k_s}y^{l_s}\cdots z^{q_s}.$$

如果 $A_1=A_2=\cdots=A_s=0$,特别地称为零多项式,这时 $P(x,y,\cdots z)\equiv0$.逆命题也成立.

如果各项的指数全为零,则 $P(x,y,\cdots,z)=A_1+A_2+\cdots+A_s=B$(常数),称为零次多项式.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 中仅有一个不为零,则 $P(x,y,\cdots z)$是单项式;若仅有两个不为零,则 $P(x,y,\cdots,z)$是二项式,等等.

多项式各项的次数 $k_i+l_i+\cdots+q_i(i=1,2,\cdots,s)$中最大的值称为这个多项式的次数.如果各项次数都相等(等于 n),则称这个多项式为 n 次齐次多项式,或叫做 n 次型.

只含有一个自变数的多项式称为一元多项式,含有两个自变数的多项式称为二元多项式等等.

3° 多项式恒等的充要条件　以标准形式给出的两个多项式恒等的充分必要条件是这两个多项式的对应项分别是具有相同系数的同类项.这个条件是待定系数法的理论依据.

4° 多项式诸项的排列方法　多项式常按降幂或升幂排列,如

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq0),$$

或

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

2.2 多项式的运算

(1) 加法和减法 按同类项合并.

(2) 乘法 按乘法对加法的分配律进行,也可列成竖式进行.

(3) 简略乘法公式

1° $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$.

2° $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

3° $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$.

4° $(x \mp y)(x^2 \pm xy + y^2) = x^3 \mp y^3$.

5° $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

6° $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$.

7° $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$.

8° $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + 2x_2(x_3 + x_4 + \cdots + x_n) + 2x_3(x_4 + x_5 + \cdots + x_n) + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n.$$

9° $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y+z) + 3y^2(x+z) + 3z^2(x+y) + 6xyz$.

10° $(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$.

11° $(x+y)(x^{2k-1} - x^{2k-2}y + x^{2k-3}y^2 - \cdots - y^{2k-1}) = x^{2k} - y^{2k}$.

12° $(x+y)(x^{2k} - x^{2k-1}y + x^{2k-2}y^2 - \cdots + y^{2k}) = x^{2k+1} + y^{2k+1}$.

13° $$(x \pm y)^n = x^n \pm nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 \pm \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}x^{n-r}(\pm y)^r + \cdots + (\pm y)^n$$
$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}(\pm y) + C_n^2 x^{n-2}(\pm y)^2 + \cdots + C_n^r x^{n-r}(\pm y)^r + \cdots + C_n^n(\pm y)^n.$$

14° $(x^3 \pm y^3)(x^2 \pm xy + y^2) = x^5 \pm x^4y + x^3y^2 \pm x^2y^3 + xy^4 \pm y^5$.

15° 拉格朗日(Lagrange)恒等式
$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$
$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2.$$

16° 欧拉(Euler)恒等式.
$$(ax + by + cz + du)^2 + (bx - ay + dz - cu)^2 + (cx - dy - az + bu)^2 + (dx + cy - bz - au)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2).$$

2.3 多项式的可除性

1. 多项式的因式

若多项式 $P(x,y,\cdots,z)$ 能被多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$ 除尽,则存在一个多项式 $\Phi(x,y,\cdots,z)$,使恒等式
$$P(x,y,\cdots,z) = Q(x,y,\cdots,z)\Phi(x,y,\cdots,z)$$
成立.

多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$ 同 $\Phi(x,y,\cdots,z)$ 叫做多项式 $P(x,y,\cdots,z)$ 的因式.

2. 一元多项式的带余式的除法

1° 当 $P(x)$ 不能被 $Q(x)$ 除尽时,可以有不完全商 $\Phi(x)$ 及余式 $r(x)$,即
$$P(x) = Q(x)\Phi(x) + r(x).$$
常用长除法或角形除法进行实际计算.

2° 用 $x-a$ 除一元多项式 $P(x)$.

这时余式 $r(x) = P(a)$,即
$$P(x) = (x-a)\Phi(x) + P(a).$$
$\Phi(x)$ 及余数 $P(a)$ 的具体计算,可用待定系数法,并形成下列格式:

设
$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$
$$\Phi(x) = A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \cdots + A_1x + A_0,$$
$$Q(x) = x - a.$$
则有

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0	a
+)	aA_{n-1}	aA_{n-2}	$\cdots$	aA_1	aA_0	
$a_n = A_{n-1}$	A_{n-2}	A_{n-3}	$\cdots$	A_0	$a_0 + aA_0 = r = P(a)$	

3° 当且仅当数 a 是 $P(x)$ 的根,即 $P(a) = 0$ 时,多项式 $P(x)$ 能被 $x-a$ 除尽.

这个定理也可被灵活用于验证多元多项式的因式.

2.4 多项式的因式分解

1. 复数域上的代数基本定理

1° 代数基本定理 每一个正指数的多项式 $P(x)$ 在复数域上至少有一个根.

2° 每一个 $n(n>0)$ 次多项式 $P_n(x)$ 在复数域上能分解为 n 个一次因式的乘积.

3° 在实系数多项式 $P_n(x)$ 情形,如果有虚根 $\alpha = \xi + \eta\mathrm{i}(\eta \neq 0)$,则必有其共轭虚根 $\overline{\alpha} = \xi - \eta\mathrm{i}$. 这时 $P_n(x)$ 含有的因式 $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\xi x + (\xi^2 + \eta^2) = x^2 + px + q$ 是实系数二次三项式,所以多项式 $P_n(x)$ 在实数域上的分解式是
$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_m}.$$
其中 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l + 2(\beta_1 + \cdots + \beta_m) = n$,式中的因式在实数域上都是既约的(不能再分解).

2. 多项式的因式分解

(1) 常用公式 除 2.2 节介绍的乘法公式可以逆用以外,常见的还有(在实数域上)

1° $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2].$$

2° $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

3° $x^4 + y^4 = (x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)$.

4° $x^4-y^4=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$.

5° $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

$$=(x-y)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}xy+y^2\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}xy+y^2\right).$$

6° $x^6-y^6=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

7° $x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)$.

(2) 因式分解的方法　因式分解的方法一般有

1° 提取公因式法.

2° 分组分解法(有时需人为地裂项或引入加减相消项).

3° 乘法公式的逆用.

4° 配平方法.

5° 代入验证法.

2.5 插 值 公 式

1° n 次多项式 $P_n(x)$ 在复数域上有 n 个根.(这是代数基本定理的另一种说法.)

2° 若两个次数不大于 n 的多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 对于自变数的 $n+1$ 个不同的值都有相同的值,那么它们恒等.

3° 拉格朗日插值公式　次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 对于 x 的 $n+1$ 个不同取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 有 $n+1$ 个值 $y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1}$,这个多项式便被唯一地确定,其表达式是

$$\begin{aligned}P_n(x)=&\,y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})}+\\&\,y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)(x_2-x_{n+1})}+\cdots+\\&\,y_{n+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)}.\end{aligned}$$

2.6 有穷数列及其求和

依照某种规则排列着的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为有穷数列,其中每一个数称为该数列的项.

1. 等差数列

形如 $a_1,a_1+d,a_1+2d,\cdots,a_1+(n-1)d$ (d 为常数)的数列叫等差数列.其中 d 为公差.等差数列的和为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

等差中项　$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\quad(k>1).$$

2. 等比数列

形如 $a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1}$($q$ 为常数)的数列叫等比数列,其中 q 为公比.等比数列的和为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.$$

等比中项　$$a_k=\pm\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}\quad(a_{k-1}a_{k+1}>0).$$

3. 调和数列

如果数列 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 是等差数列,则数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 叫做调和数列.

调和中项　$$a_k=\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a\,k+1}.$$

4. 高阶等差数列

设有一数列

$$\begin{array}{lccccccc}
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \cdots\\
第一次差(d_1) & & a_2-a_1=\Delta a_1 & & a_3-a_2=\Delta a_2 & & a_4-a_3=\Delta a_3 & & a_5-a_4=\Delta a_4 & & \cdots\\
第二次差(d_2) & & & \Delta a_2-\Delta a_1=\Delta^2a_1 & & \Delta a_3-\Delta a_2=\Delta^2a_2 & & \Delta a_4-\Delta a_3=\Delta^2a_3 & & & \cdots\\
第三次差(d_3) & & & & \Delta^2a_2-\Delta^2a_1=\Delta^3a_1 & & \Delta^2a_3-\Delta^2a_2=\Delta^3a_2 & & & & \cdots\\
\cdots & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

其中　$$\Delta^ka_i=\Delta^{k-1}a_{i+1}-\Delta^{k-1}a_i.$$

如果做了 r 次,这时 Δ^ra_i 彼此全都相等,以后的 $\Delta^{r+1}a_i$ 全都为零,则称原来的数列 $a_1,a_2,\cdots$ 为 r 阶等差数列(例如,等差数列 $a_1,a_1+d,a_1+2d,\cdots,a_1+(n-1)d$ 就是一阶等差数列).通项公式($n>r$)

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{r!}d_r.$$

前 n 项和

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2!}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d_2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{(r+1)!}d_r.$$

5. 某些数列的前 n 项和

1° $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

2° $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3° $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

4° $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

5° $1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

6° $1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\dfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$.

7° $1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\dfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

8° $1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8=\dfrac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$.

9° $1^9+2^9+3^9+\cdots+n^9=\dfrac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$.

10° $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}=\dfrac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$.

一般,若

$$\sum_{k=1}^{n}k^p = a_1n^{p+1}+a_2n^p+a_3n^{p-1}+\cdots+a_{p+1}n,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}k^{p+1} = \frac{p+1}{p+2}a_1n^{p+2}+\frac{p+1}{p+1}a_2n^{p+1}+\frac{p+1}{p}a_3n^p+\cdots+\frac{p+1}{2}a_{p+1}n^2+\left[1-(p+1)\sum_{k=1}^{p+1}\frac{a_k}{(p+3-k)}\right]n.$$

11° $1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n+1), & n\text{ 为奇数},\\ -\dfrac{1}{2}n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

12° $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

13° $1^3-2^3+3^3-\cdots+(-1)^{n-1}n^3=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2, & n\text{ 为奇数},\\ -\dfrac{1}{4}n^2(2n+3), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

14° $1^4-2^4+3^4-\cdots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}n(n+1)(n^2+n-1)$.

15° $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$.

16° $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

17° $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$.

18° $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

19° $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

20° $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

21° $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$
$=\dfrac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

22° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(j+1)\cdots(j+k)=\frac{1}{k+2}\,\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!}$.

23° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(j+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.

24° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(j+1)^2(j+2)=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$.

25° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(n^2-j^2)=\frac{1}{4}n^2(n^2-1)$.

26° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}2^jj(j+1)=2^{n+1}(n^2-n+2)-4$.

27° $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

28° $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

29° $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$
$=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

30° $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{(j+1)(j-1)}=\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$.

31° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)(2j+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

32° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(3j-2)(3j+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

33° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)}=\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$.

34° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(3j-2)(3j+1)(3j+4)}=\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$.

35° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{j(j+1)(j+2)}=\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

36° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{j(j+1)(j+3)}=\frac{29}{36}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

37° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j2^{j-1}}{(j+1)(j+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{1}{2}$.

38° $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j^24^j}{(j+1)(j+2)}=\frac{2}{3}+\frac{(n-1)4^{n+1}}{3(n+2)}$.

39° $\sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{j(j+1)2^j}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$.

40° $\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+3}{j(j+1)3^j}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}$.

41° $\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}2^j}{[2^j+(-1)^j][2^{j+1}+(-1)^{j+1}]}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right]$.

42° $\sum_{j=1}^{n}\frac{b(b+1)\cdots(b+j-1)}{a(a+1)\cdots(a+j-1)}=\frac{1}{b-a+1}\left[\frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}-b\right]$.

3　分式与根式

3.1　比 和 比 例

1. 比

比是两个数(量)的商.反映将后一数(量)作为单位时,前一数(量)占后一数(量)的份额.a 与 b 的比(或 a 比 b)记为

$$a:b\quad 或\quad \frac{a}{b},$$

其中 a 称为比的前项,b 称为比的后项.

2. 比例

比的等式(两个比相等),或这一比以另一比为“例”.记为

$$a:b=c:d\quad 或\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

其中 a,c 称为比例的前项,b,d 称为比例的后项;a,d 称为比例的外项,b,c 称为比例的内项.

3. 比例的性质

1° 约化　设 $p\neq 0$,由 $a:b=c:d$ 可推出

$$ap:bp=c:d;\quad ap:b=cp:d;$$

$$\frac{a}{p}:\frac{b}{p}=c:d;\quad \frac{a}{p}:b=\frac{c}{p}:d.$$

2° 交叉积　由 $a:b=c:d$ 有 $ad=bc$.

3° 项的交换　由 $a:b=c:d$ 得

$a:c=b:d$ (更比定理);　$d:b=c:a$;　$d:c=b:a$ (反比定理).

4° 衍生比例　由 $a:b=c:d$ 得

$(a+b):a=(c+d):c$ (合比定理);

$(a+b):b=(c+d):d$;

$(a-b):a=(c-d):c$ (分比定理);

$(a-b):b=(c-d):d$;

$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ (合分比定理);

$(pa\pm qb):(ra\pm sb)=(pc\pm qd):(rc\pm sd)$.

5° 比例因子　由 $a:b=c:d$ 得

$$a=pc,\quad b=pd.$$

p 称为比例因子.

6° 连比例(有相同内项的比例)　$a:b=b:c$.

7° 比例中项　由 $a:x=x:b,ab\geqslant 0$,得到 $x=\sqrt{ab}$.x 称为 a 和 b 的比例中项或几何平均值.

8° 调和连比例　由 $(a-x):(x-b)=a:b$,得

$$x=\frac{2ab}{a+b},\quad 即\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

9° 比例链　若几个比相等　$a:a_1=b:b_1=c:c_1=\cdots$,可写为比例链

$$a:b:c\cdots=a_1:b_1:c_1:\cdots.$$

链式中等号两端不能解释为接连相除的商.事实上,比例链只是一串比例式的缩写而已,它又可以重新排列为很多单个比例,如

$$a:b=a_1:b_1,b:c=b_1:c_1,a:c=a_1:c_1,b:d=b_1:d_1.$$

10° 等比公式　若 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\cdots=a_n:b_n$,则

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_nb_n}=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}.$$

其中 λ_i 为一组任意不全为零的常数,b_i 都不等于零($i=1,2,\cdots,n$).

4. 解比例式

$a:b=c:d$ 中任意一项可由其他三项来表示.即

由　$x:b=c:d$　得　$x=\frac{bc}{d}$;

由　$a:x=c:d$　得　$x=\frac{ad}{c}$;

由　$a:b=x:d$　得　$x=\frac{ad}{b}$;

由　$a:b=c:x$　得　$x=\frac{bc}{a}$.

5. 两个变数(量)之间的正比、反比关系

1° 正比　若变数(量)y 与变数(量)x 有着关系式 $y=cx$ 或 $\frac{y}{x}=c$,c 为常数.则称 y 与 x 成正比,还可记为 $y\propto x$.

若 $x\propto y$,又 $y\propto z$,则 $x\propto z$.

2° 反比　若变数(量)y 与变数(量)x 有着关系式 $y=\frac{c}{x}$ 或 $yx=c$,c 为常数.则称 y 与 x 成反比,还可记为 $y\propto\frac{1}{x}$.

当 y 与 x 成正比时，y 的一系列取值 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 与 x 的一系列对应值 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 有相同的比值.

当 y 与 x 成反比时，y 的一系列取值 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 与 x 的一系列对应值 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 有相同的乘积.

3° 变数(量)y 与变数(量)x 和 z 的关系　若 z 固定，则 y 与 x 成正比；若 x 固定，则 y 与 z 成正比，此时，y 与 xz 成正比.

3.2 有理分式

1. 有理分式

两个多项式的比 $\dfrac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}$ 叫做有理分式，又叫代数分式，简称为分式. 比的前项是分子，比的后项是分母. 作为分母的多项式 $Q(x,y,\cdots,z)$ 不能是零多项式(即不能恒等于零).

多项式 $P(x,y,\cdots,z)$ 可以看成分母为1的有理分式.

所有使有理分式的分母不为零的(在已知数域内的)自变数值组形成的集合，叫做(在已知域上讨论的)有理分式的定义域，即自变数容许值组的集合.

2. 有理分式的恒等

1° 两个分式对于所有自变数的容许值组都相等，即

$$\frac{P(x,y,\cdots z)}{Q(x,y,\cdots z)}=\frac{P_1(x,y,\cdots z)}{Q_1(x,y,\cdots z)},$$

其充分必要条件是恒等式

$$P(x,y,\cdots,z)Q_1(x,y,\cdots,z)\equiv P_1(x,y,\cdots,z)Q(x,y,\cdots,z)$$

对于给定数域内任意自变数值组都成立.

2° 有理分式的分简　任何有理分式 $\dfrac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}$ 都有与它恒等的既约分式，即

$$\frac{p(x,y,\cdots,z)}{q(x,y,\cdots,z)}=\frac{P(x,y,\cdots,z)}{Q(x,y,\cdots,z)}.$$

所谓既约分式，是指其分子和分母没有任何公(多项式)因式，即分子和分母是互素多项式.

3° 延拓原理　既约分式的定义域包含了原来分式的定义域，即增加了那些使分母 $Q(x,y,\cdots,z)$ 等于零而分母 $q(x,y,\cdots,z)$ 不等于零的自变数值组. 为了使得彼此恒等的这两个有理分式有相同的定义域，约定采用既约分式的定义域，这是原来分式定义域的拓宽，叫延拓原理.

3. 分式的运算与恒等变形

1° 加、减法

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{M}{N}=\frac{PN\pm QM}{QN}.$$

式中公分母取各分母的最低公倍式则更适宜.

2° 乘、除法

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}=\frac{PM}{QN},\quad \frac{P}{Q}\div\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}\times\frac{N}{M}=\frac{PN}{QM}.$$

加法、乘法均满足交换律、结合律和分配律. 除式的分母不能恒等于零.

3° 恒等变形举例

例如，化简

$$R(x,y,z)=\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}}+(x+y+z)^2.$$

因为

$$\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3yz}{y+z}$$

$$=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)},$$

$$\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{yx}+\frac{1}{xz}}=\frac{2x(y+z)}{x+y+z},$$

所以

$$\begin{aligned}R(x,y,z)&=\frac{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{x+y+z}+(x+y+z)^2\\&=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+(x+y+z)^2\\&=3(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

3.3 部分分式

1. 真分式

考虑一元有理分式

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

这里 $Q(x)\neq0, a_n\neq0, b_m\neq0$. 当 $n<m$ 时称为真分式；$n\geqslant m$ 时称为假分式. 假分式可以用多项式的带余式的除法求出整式部分 $\Phi(x)$，再加上真分式 $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$.

2. 部分分式

1° 任一既约真分式都可唯一地(在实数域上)分解成形如 $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ 或 $\dfrac{Fx+G}{(x^2+px+q)^l}$ (其中 $p^2-4q<0$)的基本真分式之和，这些基本真分式称为原来那个既约真分式的部分分式. 这个分解过程称为部分分式展开.

2° 一般地，如果真分式 $\dfrac{A(x)}{P(x)Q(x)}$ 的 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是互素的整式，则可唯一地

分解为

$$\frac{A(x)}{P(x)Q(x)}=\frac{A(x)M(x)}{P(x)}+\frac{A(x)N(x)}{Q(x)}=\frac{B(x)}{P(x)}+\frac{C(x)}{Q(x)},$$

右端两个分式都是真分式,也称原来分式的部分分式.

3° 若分母中含单因式$(x-\alpha),(x-\beta),\cdots$,则对应部分分式为

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)G(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{F(x)}{G(x)}\quad(\alpha\neq\beta).$$

例如,$\dfrac{x^2+3}{x(x-2)(x^2+2x+4)}$的部分分式为

$$\frac{-\frac{3}{8}}{x}+\frac{\frac{7}{24}}{x-2}+\frac{\frac{1}{12}x+\frac{7}{12}}{x^2+2x+4}.$$

4° 若分母中有 k 重因式$(x-\alpha)$,即$(x-\alpha)^k$,则对应的部分分式是

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha)^k}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

例如,$\dfrac{4x^3+12x^2+48x+108}{(x+1)^4}$的部分分式为

$$\frac{4}{x+1}+\frac{0}{(x+1)^2}+\frac{36}{(x+1)^3}+\frac{68}{(x+1)^4}.$$

5° 若分母中含有单重因式(x^2+px+q),这里 $p^2-4q<0$.则对应的部分分式是$\dfrac{Fx+G}{x^2+px+q}$.

6° 若分母中含有 k 重因式(x^2+px+q),即$(x^2+px+q)^k$,这里 $p^2-4q<0$.则对应的部分分式是 k 个分式:

$$\frac{F_1x+G_1}{x^2+px+q}+\frac{F_2x+G_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{F_kx+G_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

3.4　根　　式

1. 算术根的有关计算法则

1° 幂指数与根指数相约的法则

$$\sqrt[np]{\alpha^{mp}}=\sqrt[n]{\alpha^m}\quad(\alpha\geqslant 0,m,n,p\in\mathbf{N},n>1).$$

2° 积的开方法则

$$\sqrt[n]{\alpha\beta}=\sqrt[n]{\alpha}\cdot\sqrt[n]{\beta}\quad(\alpha,\beta\geqslant 0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

3° 分数的开方法则

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\quad(\alpha\geqslant 0,\beta>0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

4° 幂的开方法则

$$\sqrt[n]{\alpha^m}=(\sqrt[n]{\alpha})^m\quad(\alpha\geqslant 0,m,n\in\mathbf{N},n>1).$$

5° 根式的开方法则

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}}=\sqrt[mn]{\alpha}\quad(\alpha\geqslant 0,m,n\in\mathbf{N},m,n>1).$$

6° 因式移出或移入根号的法则

$$\sqrt[n]{\alpha^n\beta}=\alpha\sqrt[n]{\beta},\quad \alpha\sqrt[n]{\beta}=\sqrt[n]{\alpha^n\beta}$$
$$(\alpha,\beta\geqslant 0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

7° 通根指数的法则

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[nk_1]{\alpha^{k_1}}=\sqrt[p]{\alpha^{k_1}}\quad(\alpha\geqslant 0,n\in\mathbf{N},n>1),$$
$$\sqrt[m]{\beta}=\sqrt[mk_2]{\beta^{k_2}}=\sqrt[p]{\beta^{k_2}}\quad(\beta\geqslant 0,m\in\mathbf{N},m>1),$$

其中 p 是 n 与 m 的最小公倍数,$p=nk_1=mk_2$.

2. 根式的化简

将根式化为最简根式,应将被开方数的指数与根指数的公因数约去;应对每一个因式的指数与根指数作带余除法,以确定移出根号的因式的指数与还留在根号内的因式的指数;需要对被开方的分式的分母进行有理化的恒等变形,这归结为寻求共轭因式问题.

如果 M 与 N 是两个不恒等于零的含有根式的代数式,乘积 MN 是有理式,则称 M 与 N 互为有理化因式,或共轭因式.通常共轭因式有

1° $M=\sqrt[n]{X^pY^q}$与$N=\sqrt[n]{X^{n-p}Y^{n-q}}$

2° $M=P\sqrt{X}+q\sqrt{Y}$与$N=p\sqrt{X}-q\sqrt{Y}$.

3° $M=\sqrt[p]{X}-\sqrt[q]{Y}$与$N=\sqrt[p]{X^{n-1}}+\sqrt[p]{X^{n-2}}\sqrt[q]{Y}+\sqrt[p]{X^{n-3}}\sqrt[q]{Y^2}+\cdots+\sqrt[q]{Y^{n-1}}$,这里 n 是 p 与 q 的最小公倍数.

4° $M=\sqrt[p]{X}+\sqrt[q]{Y}$与$N=\sqrt[p]{X^{2k-1}}-\sqrt[p]{X^{2k-2}}\sqrt[q]{Y}+\cdots+\sqrt[p]{X}\sqrt[q]{Y^{2k-2}}-\sqrt[q]{Y^{2k-1}}$,这里 $2k$ 是 p 与 q 的最小公倍数.

5° $M=\sqrt[p]{X}+\sqrt[q]{Y}$与$N=\sqrt[p]{X^{2k}}-\sqrt[p]{X^{2k-1}}\sqrt[q]{Y}+\cdots-\sqrt[p]{X}\sqrt[q]{Y^{2k-1}}+\sqrt[q]{Y^{2k}}$,这里 $2k+1$ 是 p 与 q 的最小公倍数.

6° $M=P_1(x)+P_2(x)\sqrt{X}$与$N=P_1(x)-P_2(x)\sqrt{X}$.

3. 根式的运算

1° 根式的加法、减法　要合并同类根式.

2° 根式的乘法、除法　要化成同次根式,使被开方数(式)相乘除,注意使分母有理化.

3° 根式的乘方、开方　按算术根乘方、开方计算法则.

4° 复合二次根式变形公式

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

其中 $A>0,B>0$,且 $A^2>B$.

当 A^2-B 为完全平方时,公式右端就只剩单层根号.

5° $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$可设为$x\pm\sqrt{y}$,两式均立方,分别比较整式和根式部分,设法算出 x 和 y.

3.5 指数式与对数式

1. 幂概念的推广

下列幂指数的运算是在有理数域上进行的.

1° 零指数 $a^0=\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=1\quad(a\neq0)$.

适合 $$a^0a^m=a^m,(a^0)^m=a^{0m}=(a^m)^0.$$

2° 负指数 $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-(m-n)}(a\neq0,m>n)$.

适合 $$a^n\cdot a^{-n}=a^0=1,a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

3° 分数指数 $a=a^{\frac{n}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^n$,则 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\quad(a\geqslant0)$.

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

$$a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r}=\sqrt[sq]{a^{pr}}=a^{\frac{pr}{sq}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

当 $a<0$ 时,只能讨论这样的指数为分数的幂:$a^{\frac{m}{n}}$ 中 $\frac{m}{n}$ 为既约分数,且 $n=2k+1$(奇数).

2. 指数集的进一步扩张

1° 在指数仅限于有理数的情形下,不可能完备地定义已知底数和幂的值求指数的运算.一个很简单的例子是 $2^x=3$ 中的 x 若为有理数 $x=\frac{p}{q}$,则 $2^p=3^q$,而 2 与 3 互素,不可能有这样的自然数 p 与 q 使等式成立.

2° 设 α 是正无理数,a 是正实数,α_n^- 和 α_n^+ 分别是 α 的精确到 $1/10^n$ 的不足近似值和过剩近似值,规定 a^α 是 $a^{\alpha_n^-}$ 与 $a^{\alpha_n^+}$ 的共同极限

$$a^\alpha=\lim_{n\to+\infty}a^{\alpha_n^-}=\lim_{n\to+\infty}a^{\alpha_n^+}.$$

规定 $$a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}.$$

3° 在初等数学中,不能考虑负实数 a 的无理数指数幂.因为当 $a<0$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\alpha_n}$ 不存在.例如,$(-2)^{\sqrt{2}}$ 用 $(-2)^{1.4},(-2)^{1.41},(-2)^{1.414},\cdots$ 来逼近,但 $(-2)^{1.4}=(-2)^1\cdot(-2)^{0.4}=(-2)\cdot\sqrt{(-2)^5}$ 在实数域内无意义.

4° 有理数指数幂的运算规则经过极限运算可以推广到无理数指数幂.

3. 对数式

(1) 对数存在定理 如果正实数 a 不等于 1,那么对于任一给定的正实数 N,

有唯一的实数 α,使 a 的 α 次幂等于 N,即 $a^\alpha=N$.

(2) 对数的定义 如果不等于 1 的正实数 a 的某次乘方的幂等于正实数 N,则称这个幂的指数是以 a 为底的 N 的对数,记为 $\log_aN$.

按这个定义和记法,有

$$N=a^{\log_aN}.$$

零和负数在实数域内没有对数.

(3) 对数式的运算公式

1° $\log_aNM=\log_aN+\log_aM\quad(a>0,a\neq1,N>0,M>0)$.

2° $\log_a\frac{N}{M}=\log_aN-\log_aM\quad(a>0,a\neq1,N>0,M>0)$.

3° $\log_aN^k=k\log_aN\quad(a>0,a\neq1,N>0)$.

4° 换底公式 $\log_aN=\frac{\log_bN}{\log_ba}\quad(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1,N>0)$.

因此 $\log_ab=\frac{\log_bb}{\log_ba}=\frac{1}{\log_ba}$.换底公式中的 $\frac{1}{\log_ba}$ 称为由 $\log_aN$ 转换为 $\log_bN$ 的模数.

(4) 常用对数和自然对数.

以 $a=10$ 为底的对数称为常用对数(布里格(Briggs)对数),记 $\log_{10}$ 为 lg.

以 $e=2.718281828459\cdots$ 为底的对数称为自然对数(纳皮尔(Napier)对数),记 $\log_e$ 为 ln.

两者的关系是 $\lg N=\frac{\ln N}{\ln10}=\ln N\lg e$.其中 $\frac{1}{\ln10}=\lg e=M_{10}=0.43429\cdots$ 称为常用对数的模数.而 $\ln N=\lg N\ln10$,其中 $\ln10=\frac{1}{M_{10}}=2.30259\cdots$ 称为自然对数的模数.

(5) 对数式的恒等变形

例如,$\log_{a^k}a^l=\log_{a^k}(a^k)^{\frac{l}{k}}=\frac{l}{k}$.

例如,若已知 $\log_aN,\log_bN,\cdots,\log_kN\quad(N\neq1)$,则

$$\log_{ab\cdots k}N=\frac{1}{\log_N(ab\cdots k)}=\frac{1}{\log_Na+\log_Nb+\cdots+\log_Nk}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{\log_aN}+\frac{1}{\log_bN}+\cdots+\frac{1}{\log_kN}}.$$

4 方程与不等式

4.1 方程的概念

1. 方程的基本术语

(1) 方程 形状为 $F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$ 的等式叫做方程,其中

$F_1(x,y,\cdots,z)$与$F_2(x,y,\cdots,z)$是在它们定义域的公共部分里所共同研究的两个函数(解析表达式).

(2) 方程的解 是在方程的定义域中使

$$F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$$

成为真命题的一组数值 $x=a,y=b,\cdots,z=c$.

方程的解集 方程全体解的集合,可以记为

$$S=\{(x,y,\cdots,z)\mid x\in X,y\in Y,\cdots,z\in Z,\text{并且}\ F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)\}.$$

(3) 同解方程(两个方程等价) 在给定定义域上的两个方程,如果有相同的解集 S,则称这两个方程是同解方程,或称这两个方程等价.

在不同数域上,可能改变这种同解性.

(4) 方程的同解变形 一个方程用它的同解方程来代替,叫做方程的同解变形.例如

1° 若在方程的定义域上,$f_1\equiv F_1,f_2\equiv F_2$,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow f_1=f_2;$$

2° 若 F 在方程的定义域上有意义,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow F_1+F=F_2+F;$$

3° 若 F 在方程的定义域上有意义,且不为零,则

$$F_1=F_2\Leftrightarrow F_1F=F_2F.$$

(5) 方程的增根 将方程变形时,使定义域扩大了,新方程的解集比原方程的解集扩大,增加了不适合原方程的解,应舍去.

(6) 方程的遗根 若方程变形后,新方程的解集比原方程的解集缩小了,这样被遗漏的适合原方程的解,应找回.

4.2 方程的解法

1. 一元线性方程

一元线性方程(一个未知数的一次方程)为

$$ax+b=0,$$

其中 a,b 是给定数域里的数.

1° 当 $a\neq0$ 时方程有唯一解 $x=-\dfrac{b}{a}$,这个解也属于给定的数域;

2° 当 $a=0,b\neq0$ 时,方程无解;

3° 当 $a=0,b=0$ 时,方程有无数个解,即给定数域中的任何数.

2. 一元二次方程

(1) 一元二次多项式

$$P(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

(2) 一元二次方程

$$P(x)=ax^2+bx+c=0.$$

分解因式
$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0.$$

得两解
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(3) 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

1° 当 $\Delta>0$ 时,一元二次多项式(方程)有两个不等实根;

2° 当 $\Delta<0$ 时,没有实根;

3° 当 $\Delta=0$ 时,有二重实根.

(4) 在复数域上,当 $\Delta<0$ 时,有一对共轭复根 $x_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$,$x_2=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

(5) 根与系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

3. 一元三次方程

一元三次方程的一般形式为

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\quad(a\neq0).$$

(1) (三次)二项方程 $x^3+d=0$.

其最特殊的形式是 $x^3-1=0$.

分解因式
$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

解得
$$x_1=1,\quad x_2=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\omega_1,\quad x_3=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\omega_2.$$

类似地可以解 $x^3+1=0$.

对于 $x_3+d=0$,可得

$$x_1=\sqrt[3]{-d},x_2=\sqrt[3]{-d}\,\omega_1,x_3=\sqrt[3]{-d}\,\omega_2.$$

(2) 一元三次方程经减根变换 $x=y-\dfrac{b}{3a}$,可化为缩减式

$$y^3+3py+2q=0,$$

其中
$$3p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2};\quad 2q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}.$$

(3)对于缩减式 $y^3+3py+2q=0$,设想其解 $y=u+v$,应满足

$$(u+v)^3+3p(u+v)+2q=0,$$

即
$$u^3+v^3+2q+(u+v)(3uv+3p)=0.$$

对于 u,v 附加上条件 $3uv+3p=0$,得关于 u 和 v 应满足的方程组

$$\begin{cases} u^3+v^3=-2q, \\ uv=-p, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} u^6+2u^3v^3+v^6=4q^2, \\ 4u^3v^3=-4p^3. \end{cases}$$

上下相减得　$(u^3-v^3)^2=4q^2+4p^3$,

故

$$\begin{cases} u^3-v^3=\pm 2\sqrt{q^2+p^3}, \\ u^3+v^3=-2q. \end{cases}$$

解得　$u^3=-q\pm\sqrt{q^2+p^3}$,　$v^3=-q\mp\sqrt{q^2+p^3}$.

由条件 $u^3+v^3=-2q$ 及 $uv=-p$ 可知,只需考虑 $u^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$, $v^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$这一组解(或 $u^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$, $v^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$).

开立方又各得3个解:

$$u_1=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\quad u_2=u_1\omega_1,\quad u_3=u_1\omega_2;$$

$$v_1=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},\quad v_2=v_1\omega_1,\quad v_3=v_1\omega_2.$$

这样可配成9个解 $y=u_i+v_j$　$(i=1,2,3;j=1,2,3)$,但实际上由附加条件 $u_iv_j=-p$,且因 $\omega_1\omega_2=1$,所以只有 u_1v_1, u_2v_3, u_3v_2 能满足.

(4) 判别式 q^2+p^3 有3种情形

1° $q^2+p^3>0$,可得一实根 y_1,二复根(共轭)y_2 和 y_3:

$$y_1=u_1+v_1=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$y_2=u_1\omega_1+v_1\omega_2,\quad y_3=u_1\omega_2+v_1\omega_1.$$

2° $q^2+p^3=0$,可解得三实根(其中有二根相等):

$$y_1=2\sqrt[3]{-q},\quad y_2=y_3=-\sqrt[3]{-q}.$$

3° $q^2+p^3<0$,引入三角函数

$$\cos\varphi=\frac{q}{(p\sqrt{-p})},\quad 0<\varphi<\pi,$$

也可解得3个实根.

$$y_1=2\sqrt{-p}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2=2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3=2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

4. 一元四次方程

1° 标准形式为

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

作减根变换 $x=z-\frac{a}{4}$,得缩减式

$$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

其中

$$p=b-\frac{3a^2}{8},$$

$$q=c-\frac{ab}{2}+\frac{a^3}{8},$$

$$r=d-\frac{ac}{4}+\frac{a^2b}{16}-\frac{3a^4}{256}.$$

2° 预解式

$$y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0,$$

其根为 y_1,y_2,y_3,满足 $y_1\cdot y_2\cdot y_3=q^2>0$,可知 y_1,y_2,y_3 有3种情形(均为正实数,一正两负实数,一实数两共轭复数).

3° 缩减式的4个根

$$z_1=\frac{1}{2}(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}),\quad z_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}),$$

$$z_3=\frac{1}{2}(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}),\quad z_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}).$$

有3种情形:4个实根,两对共轭复根,两实根及一对共轭复根.并应使

$$\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3}=-\frac{q}{8}.$$

最终由 $x=z-\frac{a}{4}$ 算出 x_1,x_2,x_3,x_4.

4° (四次)二项方程　$x^4-1=0$,

可简单地由因式分解　$(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$,

得　$x_1=1, x_2=-1, x_3=\mathrm{i}, x_4=-\mathrm{i}$;

而　$x^4+1=0$,

经因式分解

$$x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0$$

解得

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\quad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),\quad x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i}).$$

5. 一元 n 次方程

一元 n 次方程的一般形式为

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

1° 余数定理　$P(x)$用 $x-a$ 除,其余数为 $P(a)$,即

$$\frac{P(x)}{x-a}=Q(x)+\frac{P(a)}{x-a}.$$

2° 若$P(x)$被 $x-a$ 所除尽,则 $x=a$ 为方程$P(x)=0$的一个根. n 次方程有 n

个根.

3° 若多项式 $P(x)$ 的因式分解式是

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\cdots P_k(x),$$

则解方程 $P(x)=0$，只要解方程 $P_1(x)=0,P_2(x)=0,\cdots,P_k(x)=0$，再将这些方程的各个根(解)集合起来，便得到所给方程的根的集(解集).

4° 根与系数的关系　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为方程 $P(x)=0$ 的 n 个根，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=(-1)^1\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=(-1)^2\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

5° 整系数方程

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

如果有有理根 $\dfrac{p}{q}$，其 p 与 q 互素，则 a_0 能被 p 整除，而 a_n 能被 q 整除.

6° (推论 1)整系数多项式(整系数方程)的每个整根是常数项的因数.

7° (推论 2)首项系数是 1 的整系数多项式(整系数方程)的每个有理根是整数.

8° 在方程 $P(x)=0$ 中，若以 $x=\dfrac{y}{k}$ 代入，得出 $F(y)=0$ 的各根相应都为 $P(x)=0$ 各根的 k 倍.

9° 在方程 $P(x)=0$ 中，若以 $x=-y$ 代入，得出 $F(y)=0$ 的各根相应都和 $P(x)=0$ 的各根的绝对值相等，而符号相反.

10° 在方程 $P(x)=0$ 中，若以 $x=y+h$ 代入，得出 $F(y)=0$ 的各根相应都等于 $P(x)=0$ 的各根减 h.

11° 在多项式 $P(x)$ 中，若相邻两项系数符号正负相反，则称系数符号变更一次. 笛卡儿(Descartes)符号定理指出：方程 $P(x)=0$ 中正根的数目不能超过 $P(x)$ 中系数符号变更的次数；负根的数目不能超过 $P(-x)$ 中系数符号变更的次数.

12° 若以实数 $x=a,x=b$ 代入 $P(x)$ 中，而 $P(a)$ 与 $P(b)$ 数值的符号相反，则 $P(x)=0$ 中其值在 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的根必为奇数个(包括重根数).

13° 二项方程　$x^n-a=0$.

在复数域上，设 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则方程的 n 个根是

$$x=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

14° 复根的个数　若方程 $P(x)=0$ 各项的系数都是实数，则由笛卡儿符号定理可找到正负根(实根)至多各有多少个，再以方程的次数减这总数，其差额(若是奇数则应加 1)就表明至少有这个数目的复根存在.

15° 综合除法　是依靠分离系数且随乘随加以求出多项式 $P(x)$ 除以 $(x-a)$ 所得商式 $Q(x)$ 及余数 $P(a)$ 的方法.

16° 无理根的近似值　采用秦九韶法即霍纳(Horner)法.

17° 三项方程

$$ax^{2n}+bx^n+c=0\quad(a\neq0)$$

的根是　$x=\sqrt[n]{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$　(共 $2n$ 个复根).

双二次方程　$ax^4+bx^2+c=0\quad(a\neq0)$

是其特殊情形，　$x=\pm\sqrt{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

18° 倒数方程

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+cx^2+bx+a=0.$$

即凡与首末两项一般远的两项，其系数都相等. 它的任何一根不能为零，因为将 $x=0$ 代入，发现 $a=0$，但这时方程次数便没有 n 次.

如果 α 是上述方程的根，则其倒数 $\dfrac{1}{\alpha}$ 也是它的根. 因为

$$a\cdot\frac{1}{\alpha^n}+b\cdot\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\cdots+b\cdot\frac{1}{\alpha}+a=\frac{a+b\alpha+\cdots+b\alpha^{n-1}+a\alpha^n}{\alpha^n}=0.$$

6. 分式方程和无理方程

1° 既约分式方程

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$

其解与 $P(x)=0$ 的解相同(方程等价).

2° 无理方程

$$F(x,\sqrt[n]{P(x)})=0,$$

其中 $F(x,y)$ 是变数 x 与 y 的多项式，$P(x)$ 是一元多项式.

常利用将方程两端乘同次方以消去根式. 这样得到的有理方程在复数域上是同原方程同解(等价)的，而在实数域上则不然.

7. 指数方程和对数方程

(1) 指数方程

1° 最简方程 $a^x=c(a>0$ 且 $a\neq1)$，当 $c>0$ 时有唯一解 $x=\log_a c$；当 $c\leqslant0$ 时无解.

2° 形如 $F(a^x)=0$ 的方程，其中 $F(x)$ 是代数式. 如方程 $\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})=m$.

(2) 对数方程

最简方程 $\log_a x=c(a>0,a\neq1)$ 对于任何实数 c 有唯一解 $x=a^c$.

(3) 在用初等方法解指数方程与对数方程时，常常将两端对数化或乘幂化，这可能改变式子的定义域，而破坏方程的等价性(同解性).

1° 方程 $f(x)=\varphi(x)$ 与 $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}(a>0,a\neq 1)$ 同解.

2° 若 $f(x)>0,\varphi(x)>0$，则方程 $f(x)=\varphi(x)$ 与 $\log_a f(x)=\log_a\varphi(x)$ 同解；若 $f(x),\varphi(x)$ 不能保持恒正，则取对数后可能失掉解.

3° 应用积、商、幂的对数公式时可能失掉解.

8. 方程组

(1) 二元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$ 的初等解法有代入法，互等法，加减消元法.

(2) 二元二次方程组的几种特殊情形

1° 一个方程是二次的，另一个是线性的方程，可用代入法解.

2° 纯二次方程(无 xy 项)，可用加减消元法解.

3° 方程组中只含 xy 二次项. 可用加减消元法及代入法解.

4° 方程组为两个齐次二次方程时，可作变量代换 $y=xz$，化为 z 的二次方程.

4.3 不 等 式

1. 不等式的概念

(1) 不等式　若两个解析表达式用符号 $<,\leqslant,>,\geqslant,\neq$ 之一联结，则称整个关系式为不等式.

如果这样的关系式不含变数，则该不等式就是一个确定的真命题或假命题. 例如 $5+2>3$ 是一个真命题.

如果这样的关系式中至少含有一个变数，则当变数在式子的定义域中取不同值时，该不等式可以是真命题或假命题.

使不等式成为真命题的全体变数数值的集合叫做不等式的解集.

(2) 不等式的基本性质

1° 非对逆性　$A<B\Leftrightarrow B>A$.

2° 传递性　$A<B$ 且 $B<C\Rightarrow A<C$.

3° $A<B\Leftrightarrow B-A>0$(或 $A-B<0$).

4° 加法的单调性　$A<B\Rightarrow A+C<B+C$

5° 同向不等式可以两端分别相加

$$A<B \text{ 且 } C<D\Rightarrow A+C<B+D.$$

6° 乘法单调性

$$A<B\Rightarrow Am<Bm\ (m>0) \text{ 或 } Am>Bm\quad (m<0),$$

特别

$$A<B\Rightarrow -A>-B.$$

7° 异向不等式可以两端分别相减

$$A<B \text{ 且 } C>D\Rightarrow A-C<B-D.$$

8° 正数同向不等式可以两端分别相乘

$A<B$ 且 $C<D$，A,B,C,D 均为正数 $\Rightarrow AC<BD$.

负数同向不等式两端相乘不等号反向.

$A<B$ 且 $C<D$，A,B,C,D 均为负数 $\Rightarrow AC>BD$.

9° 正数不等式两端可以自乘同次方

$A<B$，A,B 是正数 $\Rightarrow A^n<B^n$，n 是自然数.

10° 同号(两端同为正数或同为负数)不等式两端取倒数，则不等号反向

$$A<B \quad \text{且} \quad A,B \text{ 同号}\Rightarrow \frac{1}{A}>\frac{1}{B}.$$

(3)用不等式给出的数集

1° 数的区间　若实数 a,b 有关系 $a<b$，则

实数 x 的集 $a<x<b$ 叫开区间 (a,b)；

实数 x 的集 $a\leqslant x\leqslant b$ 叫闭区间 $[a,b]$；

实数 x 的集 $a\leqslant x<b$ 叫半闭区间 $[a,b)$；

实数 x 的集 $a<x\leqslant b$ 叫半开区间 $(a,b]$.

2° 含有绝对值的不等式

$|x|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a\ (a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

$|x|>a\ (a<0)\Leftrightarrow -\infty<x<+\infty$.

$|x-a|<b\ (b>0)\Leftrightarrow a-b<x<a+b$.

3° 含有 $-\infty$(负无穷大)或 $+\infty$(正无穷大)的不等式

所有实数的集合记为 $-\infty<x<+\infty$，或以开区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示它.

大于(或小于)数 a 的所有实数的集合记为 $a<x<+\infty$(或 $-\infty<x<a$)，或以开区间 $(a,+\infty)$(或 $(-\infty,a)$)表示之.

2. 绝对不等式

假若对于变数任意的容许值组，表达式 $F_1(x,y,\cdots,z)$ 和 $F_2(x,y,\cdots,z)$ 的值恒成立不等式 $F_1(x,y,\cdots,z)>F_2(x,y,\cdots,z)$(不等号也可以是 $\geqslant,<,\leqslant,\neq$)，则称这个关系式为绝对不等式. 下面是一些著名的例子：

1° 对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，下列不等式成立：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

2° $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

3° $\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right|$
$\leqslant|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$.

4° $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$　(仅当 a_i 与 b_i 成比例时等号成立).

5° 若分数 $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$ 的分母是正数，$\min\frac{a_i}{b_i}$ 与 $\max\frac{a_i}{b_i}$ 分别是各分数 $\frac{a_i}{b_i}$ 中的最小数和最大数，则

$$\min\frac{a_i}{b_i}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots b_n}\leqslant\max\frac{a_i}{b_i}.$$

6° 算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i = A$，几何平均 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G$，调和平均 $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=H$ 之间的关系：$\min a_i\leqslant H\leqslant G\leqslant A\leqslant\max a_i$. 这里需假设各 a_i 为正数.

7° 加权平均与 $\min a_i$，$\max a_i$ 的关系：设 k_i 为任意正数，则

$$\min a_i\leqslant\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n}\leqslant\max a_i.$$

8° 伯努利（Bernoulli）不等式　对 $h>0$ 及对任何有理数 $r>1$，成立

$$(1+h)^r>1+rh.$$

9° 柯西-布尼亚科夫斯基（Cauchy-Буняковский）不等式（或称柯西-施瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式）　对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，成立不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

10° 算术平均数与均方根数

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

11° 切比雪夫（Чебышев）不等式　设 $a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则成立

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\cdots+b_n^k}{n}}\leqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\cdots+(a_nb_n)^k}{n}}.$$

12° 若 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$，则上述不等式的不等号 $\leqslant$ 改为 $\geqslant$.

13° 闵可夫斯基（Minkowski）不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r>1),$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\quad(0<r<1),$$

其中 $a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

等号仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

当 $r=2$ 时称为三角形不等式，表明三角形两边之和大于第三边.

14° 赫尔德（Hölder）不等式　设 $a_i,b_i,\cdots,l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正数，又 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 为正数，且 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^\alpha b_i^\beta\cdots l_i^\lambda\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^\beta\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}l_i\right)^\lambda.$$

等号仅当 $\frac{a_k}{\sum a_i}=\frac{b_k}{\sum b_i}=\cdots=\frac{l_k}{\sum l_i}$ 时成立.

15° 设 $a_i,b_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，又 $k>0$，$k\neq1$，且满足 $\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}=1$ 或 $(k-1)\cdot(k'-1)=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad(k>1),$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad(0<k<1).$$

等号仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

16° 詹森（Jensen）不等式　设 $a_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $0<r\leqslant s$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^s\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

3. 解不等式

(1) 不等式的等价性（同解性）

1° 不等式 $F_1<F_2$ 与不等式 $F_1+\varphi<F_2+\varphi$ 等价，如果 φ 对前一不等式的变数的所有容许值组都有意义.

推论：任一被加数可以从不等号的一端移到另一端，并且变号.

2° 不等式 $F_1<F_2\Leftrightarrow F_2>F_1$.

3° 若 φ 对于不等式 $F_1<F_2$ 的变数的所有容许值组都是正（负）的，则这不等式与 $\varphi F_1<\varphi F_2(\varphi F_1>\varphi F_2)$ 等价.

4° 不等式 $\frac{F}{\Phi}>0$ 与不等式 $F\Phi>0$ 等价.

(2) 线性不等式

1° 一元一次不等式

$$ax+b>0.$$

若 $a>0$，有 $x>-\frac{b}{a}$；若 $a<0$，有 $x<-\frac{b}{a}$.

若 $a=0$，则当 $b>0$ 时有 $-\infty<x<+\infty$ 满足不等式；而当 $b\leqslant0$ 时不等式无解.

2° 一元线性不等式组

$$a_1x+b_1>0,a_2x+b_2>0,\cdots,a_nx+b_n>0.$$

逐个解每一不等式，并求出这 n 个解集的交集. 如果这个交集是空集，则不等式组矛盾，无解；如果这个交集非空，则它适合每一个不等式，成为这个不等式组的解.

3° 多元线性不等式组　其每个不等式的解集要借助解析几何及线性代数知识说明，所有解集的交集也是这样.

(3) 一元二次不等式　一元二次三项式 $y=P(x)=ax^2+bx+c$ 的值的符号：

1° 当 $\Delta>0$ 时，$y=P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，这里规定 $x_1<x_2$，则 y 的符号由下表可知，一元二次不等式的解集（区间）由下表也可找到.

	$-\infty<x<x_1$	$x_1<x<x_2$	$x_2<x<+\infty$
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$
$y(a>0)$	$+$	$-$	$+$
$y(a<0)$	$-$	$+$	$-$

2° 当$\Delta=0$时，$y=P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$，则当 $x\neq-\frac{b}{2a}$时 y 与 a 同号；$x=-\frac{b}{2a}$时 y 为 0.

3° 当$\Delta<0$时，$y=P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$，则 y 的符号与 a 的符号相同.

这两种情形也可确定所给一元二次不等式是否有解.

(4)一元分式不等式　设一元分式不等式$\frac{P(x)}{Q(x)}>0$(不等号也可取$\geqslant,<,\leqslant,\neq$)，则由$\frac{P(x)}{Q(x)}>0$与 $P(x)Q(x)>0$ 等价，得出其解集.

(5)无理不等式(以含二次根式$\sqrt{\quad}$为例)

1° 无理不等式经适当变形成为$\sqrt{f(x)}>a$(或$<a$)，

若 $a>0$，应解$\begin{cases}f(x)>a^2(或<a^2);\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

若 $a=0$，应解 $f(x)>0$(或无解).

若 $a<0$，应解 $f(x)\geqslant 0$(或无解).

2° 无理不等式经适当变形成为$\sqrt{f(x)}>g(x)$(或$<g(x)$)，

应解$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>(g(x))^2\end{cases}$　$\left(或\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)\geqslant 0,\\ f(x)<(g(x))^2\end{cases}\right)$

或解$\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

(6)绝对值不等式　需转化为不含绝对值的不等式.例如$|x+2|>|x-3|$，可找出区间分界点 -2 及 3，分段去绝对值讨论求解；也可两端平方去掉绝对值符号求解.

·经典数学卷·

附录 2

平面三角

编　者　陈传理
审校者　费浦生