❖排序问题

从 n 个人中选出 q 个不同的两人小组排名次为 $1,2,\cdots,q$(无并列的)，m 为大于等于$\frac{2q}{n}$的最小整数，证明：在上面的小组中可以选出 m 个组，依名次顺序排成一列，并且每相邻的两组中有一个公共成员(假设所排的列中每连续三组无公共成员)．

证明　我们用 n 个点表示 n 个人，如果两个人在同一小组，就在相应的两点间连一条边并标上号码(名次)．这样得到一个图，有 n 个点，q 条边分别标为 $1,2,\cdots,q$．要证明的结论是可以从一个点出发，沿着边，依标号从小到大顺序前进，能走过 m 条边．

对顶点 v，我们用 $L(v)$ 表示从 v 出发，沿着边，依标号从小到大的顺序前进，能走过的边数的最大值．每个 $L(v)$ 的大小(是否大于等于 m) 难以估计，所以考虑所有 $L(v)$ 的和 $\sum\limits_{\text{所有}v}L(v)$，如果

$$\sum_{\text{所有}v}L(v) \geqslant 2q \tag{①}$$

那么其中必有某个 v，满足 $L(v) \geqslant \frac{2q}{n}$，从而 $L(v) \geqslant m$，结论成立．

因而只需证明 ①，我们对 q 施行归纳，奠基是显然的，假定命题对于 $q-1$ 成立，考虑 q 条边的情况，设点 n,w 的连线标号为 1，将这条边去掉，余下的图只有 $q-1$ 条边，记其中各点与 $L(v)$ 相应的量为 $L'(v)$，则有

$$L(u) \geqslant L'(w)+1,L(w) \geqslant L'(n)+1,L(v) \geqslant L'(v)$$

其中，所有 $v \neq n,v \neq w$．

相加并利用归纳假设得

$$\sum_{\text{所有}v}L(v) \geqslant 2+\sum_{\text{所有}v}L'(v) \geqslant 2+2(q-1)=2q$$