❖休息前后

偶数个人围着一张圆桌讨论.休息后,他们依不同次序重新围着圆桌坐下.证明:至少有两个人,他们中间的人数在休息前与休息后是相等的.

解　将座位的号码依顺时针次序记为

$$1,2,\cdots,2n \qquad ①$$

每一个人可对应一对数(i,j),其中i,j分别为他休息前和休息后的座号.

显然"横坐标"i与"纵坐标"j都跑遍①,也就是$\bmod 2n$的一个完全剩余系.

如果每两个人(i_1,j_1),(i_2,j_2)在休息前后坐在他们之间的人数均不相同,则应当有

$$j_2-j_1\neq i_2-i_1 \qquad ②$$

当$j_2<j_1$(或$i_2<i_1$)时,②中j_2应换成$2n+j_2$(i_2应换成$2n+i_2$).所以更好的写法是用同余式

$$j_2-j_1\not\equiv i_2-i_1 \pmod{2n} \qquad ③$$

③也就是

$$j_2-i_2\not\equiv j_1-i_1 \pmod{2n} \qquad ④$$

④表明纵横坐标之差$j-i$均不同余$(\bmod 2n)$,它也应当跑遍$\bmod 2n$的一个完

系.

注意 mod2n 的任一个完系的和恒等于

$$1+2+\cdots+(2n)=2n(2n+1)/2=n(2n+1)\not\equiv 0 \pmod{2n}$$

但

$$\sum(j-i)\equiv\sum j-\sum i\equiv 0 \pmod{2n}$$

矛盾!

这表明必有两个人在休息前后,坐在他们之间的人数相等.