

❖ 棋盘染色

某个 9×9 棋盘由 81 个单位方格组成. 给其中某些单位方格染色, 使得任意两个染色方格中心的距离大于 2.

- (1) 试举一个有 17 个染色方格的例子;
- (2) 试证: 染色方格的数目不能超过 17.

解 (1) 参看图 1, 我们将 17 个方格染色(请注意: 这恰恰是国际象棋中的“马步”). 任意两个染色方格中心的距离大于 2.

	//					//		
			//					//
//					//			
		//					//	
				//				
	//					//		
			//					//
//					//			
		//					//	

图 1

(2) 将 9×9 棋盘分割成 9 个 3×3 子棋盘. 每个子棋盘至多只能有两个染色方格. 下面来考察 9×9 棋盘所分割而成的 9 个 3×3 子棋盘是否每个都能有两个染色方格.

首先, 如图 2 所示, 子棋盘的染色方案本质上只有两种. 在图 3 所示的 9×9 棋盘里, 有 4 个格子标有 * 号(位于四边居中位置). 假定至少有一个标有 * 号

<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>
<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>

<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>
<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>

图 2

				*				
*								*
				*				

图 3

的方格被染色,不妨设是上侧居中位置的方格.由于对称性,我们可以假定棋盘正北方的子棋盘的染色方式如图4所示.于是,棋盘西北角子棋盘的染色方式只能是图4所示的形式.然后,正西侧的子棋盘、西南角的子棋盘的中央的子棋盘也都必须如图4所示.经过这样的推演,我们发现:正南侧的子棋盘不能有两个染色方格.最后,还需讨论一种情形.假定在图3的4个标有*号的格子中无一格被染色.对此情形,我们将删去4个*号格的棋盘,划分成17个“十字形”(其中有8个“十字形”各去掉一格),如图5所示,因为每个“十字形”中最多能有一格被染色,所以最多只能有17个方格被染色.

<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>	—	—	—
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	—	—	—
<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	—	—	—
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	—	—	—
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	—	—	—
<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	<i>O</i>	—	—	—
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	?	?	?	—	—	—
<i>O</i>	<i>O</i>	<i>X</i>	?	?	?	—	—	—
<i>X</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	?	?	?	—	—	—

图4

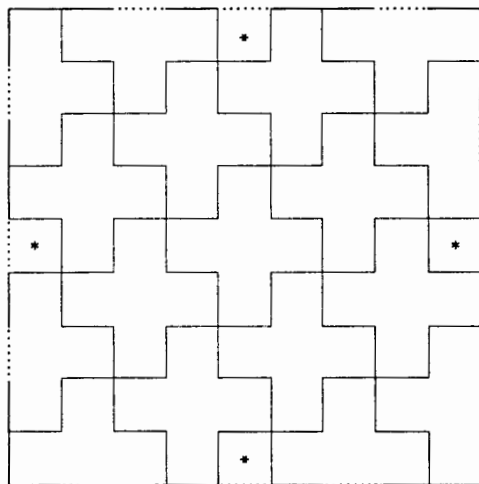


图5