5. 多目标规划

- 多目标规划建模——引例
- 多目标规划模型
- 多目标规划的示意图
- 多目标规划的性质
- 多目标规划重要算法

引例1： 投资问题

某公司在一段时间内有a(亿元)的资金可用于建厂投资。若可供选择的项目记为1，2，...，m。而且一旦对第i个项目投资，就用去a_i亿元；而这段时间内可得收益c_i亿元。问如何如确定最佳的投资方案？

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{对第}i\text{个项目投资}\\ 0 & \text{不对第}i\text{个项目投资}\end{cases}$$

约束条件为：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le a\\ x_i(1-x_i)=0, i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

双目标规划

最佳的投资方案——投资最少、收益最大

投资最少： $\min\ f_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$

收益最大 $\max\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i$

引例2：　生产问题

某工厂生产两种产品，产品A每单位利润为10元，而产品B每单位利润为8元，产品A每单位需3小时装配时间而B为2小时，每周总装配有效时间为120小时。工厂允许加班，但加班生产出来的产品利润的减去1元，根据最近的合同，厂商每周最少得向用户提供两种产品各30单位。要求:1) 必须遵守合同；2)尽可能少加班；3)利润最大. 问怎样安排生产？

每周正常时间生产得A产品数量——x_1

每周加班时间生产得A产品数量——x_2

每周正常时间生产得B产品数量——x_3

每周加班时间生产得B产品数量——x_4

约束条件为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_3 + x_4 \geq 30 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 120 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

加班最少

$$\min 3x_2 + 2x_4$$

利润最大

$$\max 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4$$

多目标规划的模型

一般形式:

$$\underset{X\in R^n}{V\text{-}\min}\left\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\right\}$$

$$s.t.\begin{cases} g_j(X)\le 0 & j=1,2,\ldots,m; \\ h_k(X)=0 & k=1,2,\ldots,l. \end{cases}$$

函数f_i, g_j, h_k满足

$$f_i:\ R^n \to R,\quad g_j:\ R^n \to R,\quad h_k:\ R^n \to R,\ p\ge 2$$

求目标函数的最大值或约束条件为大于等于零的情况，都可通过取其相反数化为上述一般形式.

定义1 把满足问题中约束条件的解$X\in R^n$称为可行解(或可行点)，所有可行点的集合称为可行集(或可行域)．记为D．即：

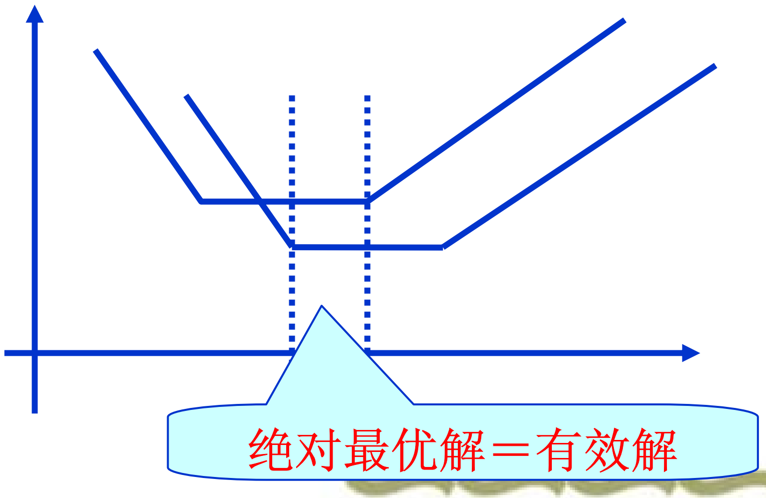
$$D=\{X\mid g_j(X)\le 0,\ h_k(X)=0,\ X\in R^n\}$$

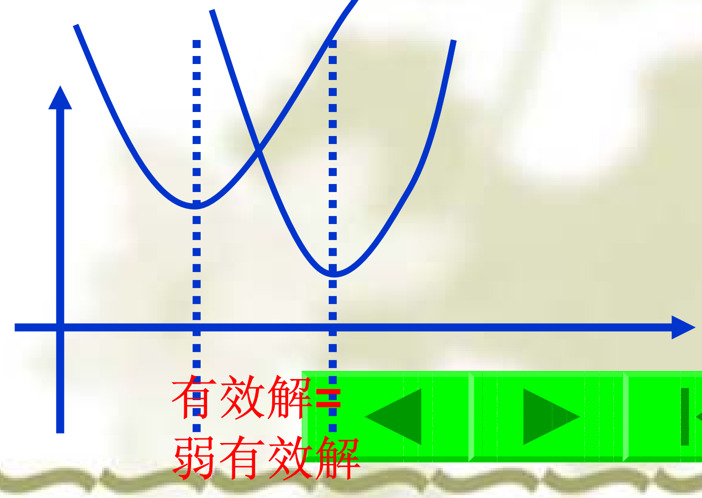
原问题可简记为 $\underset{X\in D}{V\text{-}\min}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}$

定义2 x^*是绝对最优解←→$f_j(X)\geqslant f_j(x^*)$, 任意$X\in D$, $j=1\sim p$

x^*是有效解(Pareto解) ←→不存在$X\in D$，使得$f_j(X)\leqslant f_j(x^*)$, $j=1\sim p$, 且存在$f_{j0}(X)<f_{j0}(x^*)$,

x^*是弱有效解←→ 不存在$X\in D$，使得$f_j(X)<f_j(x^*)$, $j=1\sim p$



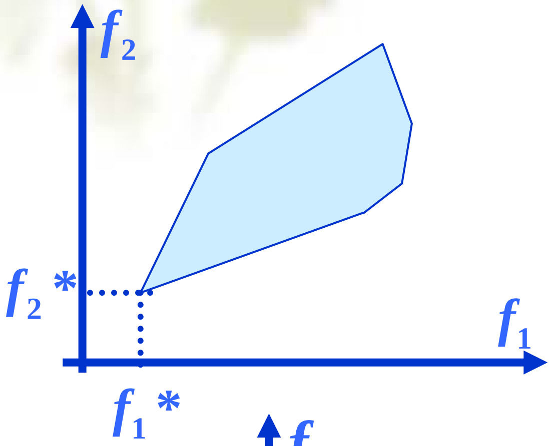


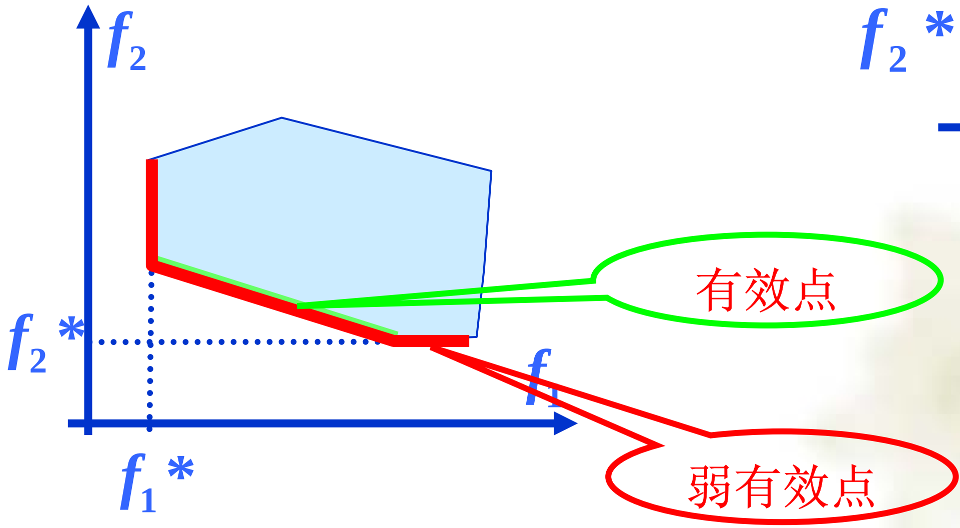
定义3 像集$F(R)=\{F(x)|x\in R\}$←→约束集R在映像F之下的值域

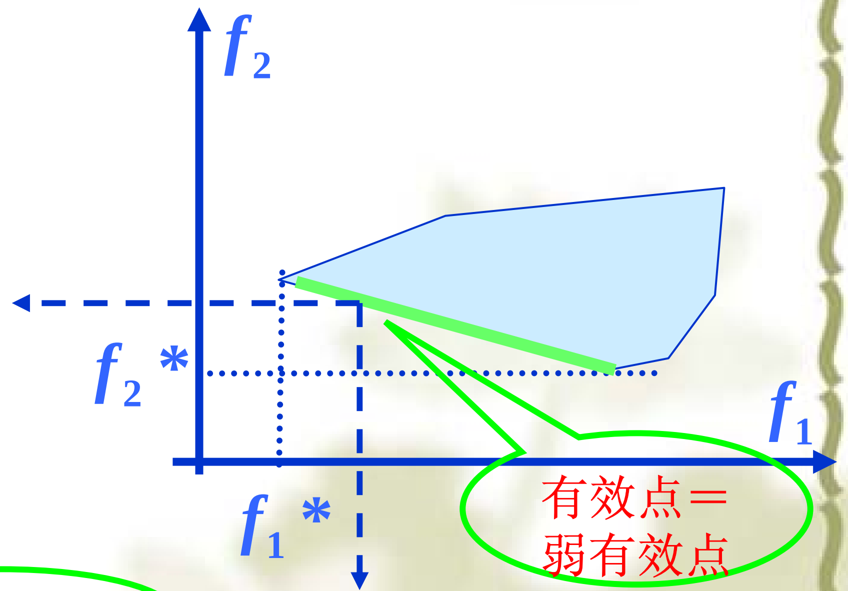
F^*是有效点 ←→不存在$F\in F(R)$, 使得$F\leq F^*$;

F^*是弱有效点←→ 不存在$F\in F(R)$, 使得$F<F$;

$\geqq \geq$







多目标规划的基本解法

基本思想——转换为单目标规划问题

(1)约束法　　**(2)**分层序列法

(3)功效系数法　　**(4)**评价函数法

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\}$$

1. 约束法——在多个目标中选定一个主要目标，而对其他目标设定一个期望值，在要求结果不比此期望值坏的条件下，求主要目标的最优值。

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{X\in D} f_1(X) \\ f_2(X)\le f_2^0, \cdots, f_p(X)\le f_p^0, \end{cases}$$

多目标规划的基本解法

2. 分层序列法——把多个目标按其重要程度排序，先求出第一个目标的最优解，再在达到此目标的条件下求第二个目标的最优解，依此类推直到最后一个求解结束即得到最优解。

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\}$$

$$\Rightarrow (1): f_1^* = \min_{X\in D} f_1(X)$$

$$(2)\ f_2^* = \min_{X\in D\cap\{x|f_1(X)\le f_1^*\}} f_2(X)$$

$$\cdots$$

$$(p)\ f_p^* = \min_{X\in D\cap\{x|f_j(X)\le f_j^*, j=1,2,\cdots,p-1\}} f_p(X)$$

改进——宽容分层序列法：给前面的最优值设定一定的宽容值 ε >0, 即此目标值再差 ε 也是可接受的!

缺点：当前面的问题最优解唯一时，后面的求解失去意义！

多目标规划的基本解法

3. 功效系数法——对不同类型的目标函数统一量纲，分别得到一个功效系数函数，然后求所有功效系数乘积的最优解。例如：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} f_{j\min} &= \min_{X\in D} f_j(X) \\ f_{j\max} &= \max_{X\in D} f_j(X) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_j(X) = \frac{f_{j\max} - f_j(X)}{f_{j\max} - f_{j\min}} \in [0,1]$$

$$j = 1,2,\cdots,p$$

$$\Rightarrow \max_{X\in D} \prod_{j=1}^{p} d_j(X) \quad 或 \max_{X\in D} \sum_{j=1}^{p} d_j(X)$$

线性型功效系数法，还有其它类型的方法，如指数型方法

多目标规划的基本解法

4. 评价函数法——这是一种最常见的方法，就是用一个评价函数来集中反映各不同目标的重要性等因素，并极小化此评价函数，得到问题的最优解。常见的以下几种方法：

4.1 理想点法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\} \Rightarrow$$

$$f_j{}^* = \min_{X\in D} f_j(X) \quad j = 1,2,\cdots,p$$

定义评价函数：

$$h(F(X)) = h(f_1,\cdots,f_p) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p}\left(f_j(X) - f_j{}^*\right)^2}$$

求解非线性规划问题： $\min_{X\in D} h(F(X))$

原理：距理想点最近的点作为最优解!

4.2 平方和加权法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

先设定单目标规划的下界(想象中的最好值)，即

$$f_j^0 \le \min_{X\in D} f_j(X) \quad j=1,2,\cdots,p$$

定义评价函数：

$$h(F(X)) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\left(f_j(X)-f_j^0\right)^2$$

其中 λ_j为事先给定的一组权系数，满足：

$$\lambda_j > 0, j=1,2,\cdots,p; \sum_{j=1}^{p}\lambda_j = 1$$

求解非线性规划问题： $\min\limits_{X\in D} h(F(X))$

原理：平方和加权法体现了通常的“自报公议”原则——那些强调各自目标重要者预先给出一个尽可能好的估计，然后“公议”给出一组表明各目标性的权系数，最后求解非线性规划给出解答。

$$h(F(X)) = \left\{\sum_{j=1}^{p}\left(\left(f_j(X)-f_j^0\right)/f_j^0\right)^2\right\}^{1/2}$$

虚拟目标法

多目标规划的基本解法

4.3 线性加权法：

$$V\text{-}\min_{X\in D}\{f_1(X), f_2(X),\cdots, f_p(X)\}\Rightarrow$$

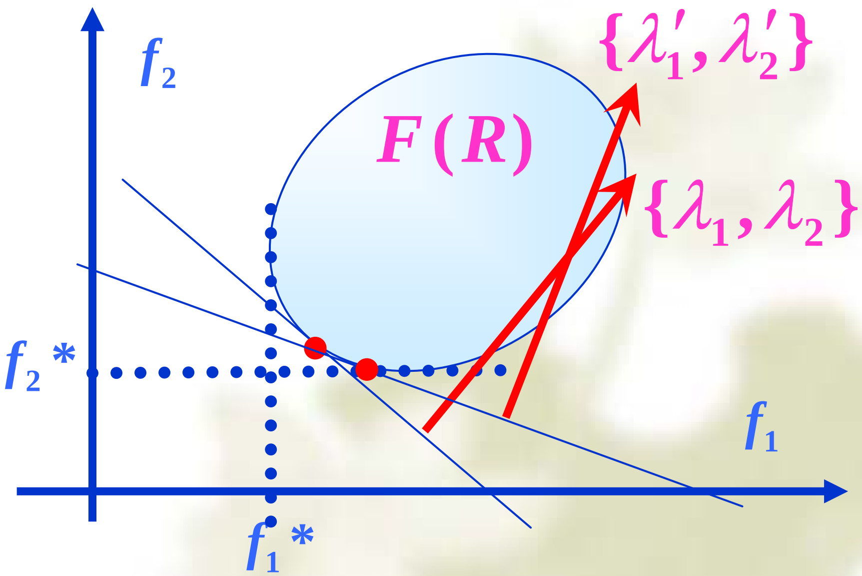
事先按目标函数$f_1(X)$、...、$f_p(X)$的重要程度给出一组权系数 λ_j，满足：$\lambda_j \ge 0, j=1,2,\cdots,p; \sum_{j=1}^{p}\lambda_j = 1$

再定义评价函数：

$$h(F(X)) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j f_j(X)$$

求解非线性规划问题：

$$\min_{X\in D} h(F(X))$$



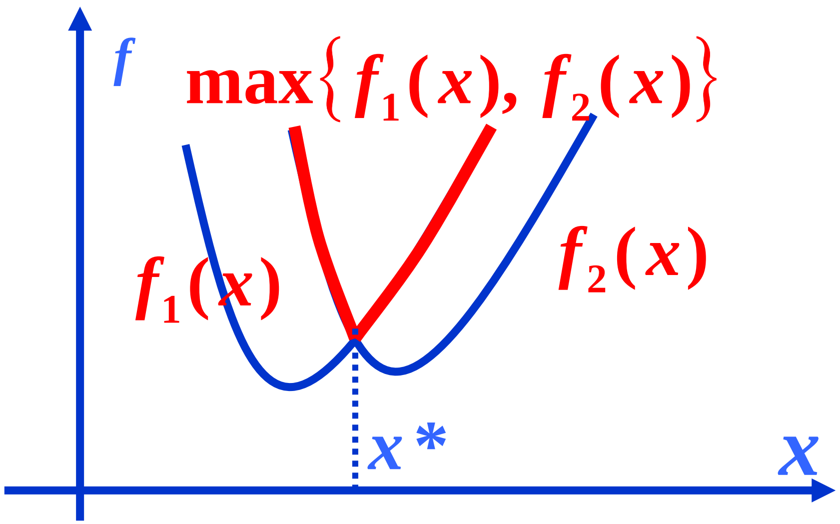
多目标规划的基本解法

4.4 “min-max”法(极小极大法)

$$V\text{-}\min_{X\in D}\left\{f_1(X),f_2(X),\cdots,f_p(X)\right\}$$

定义评价函数： $h(F(X))=\max_{1\le j\le p}\left\{f_j(X)\right\}$

求解非线性规划问题： $\min_{X\in D} h(F(X))=\min_{X\in D}\left\{\max_{1\le j\le p} f_j(X)\right\}$



原理：在最不利的情况下找出一个最有利的策略!——悲观主义决策

多目标规划的基本解法

4.4 “min-max”法(极小极大法)(转化)

此非线性规划问题目标函数不可微，不能直接用基于梯度的算法：

$$\min_{X\in D} h(F(X)) = \min_{X\in D}\left\{\max_{1\le j\le p} f_j(X)\right\}$$

但可方便转化为一个简单非线性规划问题！

令 $t=\max_{1\le j\le p} f_j(X)$ 则该规划问题可等价为：

$$\begin{cases} \min_{X,t} t \\ f_j(X)\le t,\ j=1,2,\cdots,p \\ X\in D \end{cases}$$

该技巧非常有用，将一个不可微的规划问题转化为可微的约束规划！

多目标规划的基本解法

4.5 乘除法

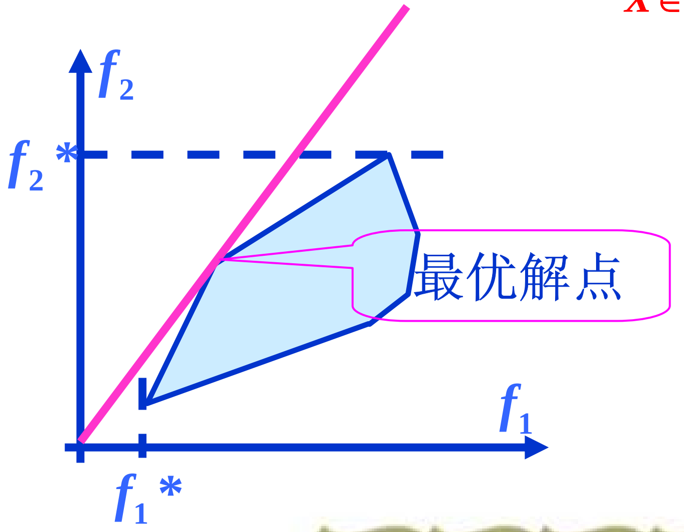
考虑两个目标的规划问题：

$$f_1(X) \to \min$$
$$f_2(X) \to \max$$

且 $f_1(X) > 0,\ f_2(X) > 0, X \in D$

则定义评价函数： $h(F(X)) = f_2(X)/f_1(X)$

求解非线性规划问题： $\max\limits_{X \in D} h(F(X)) = \max\limits_{X \in D} f_2(X)/f_1(X)$



如 $f_1(x)$ 为投资总金额，而 $f_2(x)$ 为投资后的总收益，则最优结果应是单位投资的总收入最大！

多目标规划的基本解法

理论性结果

以上所有方法所得到的最优解都是有效解(线性加权法当有权系数为零时得到的是弱有效解)!

权系数的确定方法:

专家打分法：多个专家对不同目标打分, 然后计算平均值, 计算各人给分的偏差, 让偏差大的专家发表意见, 并通过充分讨论最终达成共识等等. (而在理论分析时往往选取不同的权系数, 观察结果, 给用户提供方便决策!)

α 方法:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j^{\,i} = \beta, j = 1,2,\cdots,p \\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \end{cases}$$