马尔可夫链模型

马氏链模型

1　健康与疾病

2　钢琴销售的存贮策略

3　基因遗传

4　等级结构

马氏链模型

描述一类重要的随机动态系统（过程）的模型

- 系统在每个时期所处的状态是随机的
- 从一时期到下时期的状态按一定概率转移
- 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率

已知现在，将来与过去无关（无后效性）

马氏链 (Markov Chain)

——时间、状态均为离散的随机转移过程

1　健康与疾病

通过有实际背景的例子介绍马氏链的基本概念和性质

人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变

保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计, 以制订保险金和理赔金的数额

例1. 人的健康状况分为健康和疾病两种状态，设对特定年龄段的人，今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8, 而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7,

若某人投保时健康, 问10年后他仍处于健康状态的概率

状态与状态转移

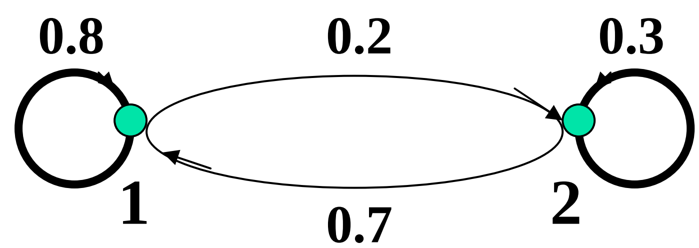
状态$X_n=\begin{cases}1, & 第n年健康\\ 2, & 第n年疾病\end{cases}$

状态概率$a_i(n)=P(X_n=i),$
$i=1,2,\ n=0,1,\cdots$

转移概率$p_{ij}=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i),\ i,j=1,2,\ \ n=0,1,\cdots$

$p_{11}=0.8 \quad p_{12}=1-p_{11}=0.2$

$p_{21}=0.7 \quad p_{22}=1-p_{21}=0.3$



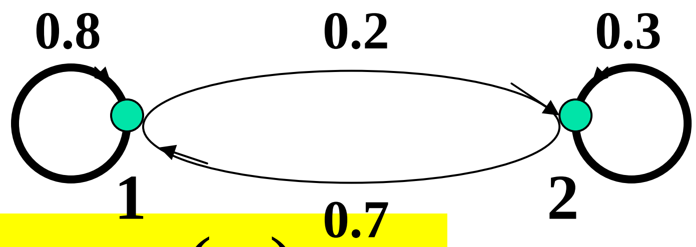
X_{n+1}只取决于X_n和p_{ij}, 与X_{n-1}, …无关

状态转移具有无后效性

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}$$

状态与状态转移



$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

给定$a(0)$, 预测 $a(n)$, n=1,2…

设投保时健康

n	0	1	2	3	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9

设投保时疾病

$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
$a_2(n)$	1	0.3	0.33	0.333	…	2/9

$n\to\infty$时状态概率趋于稳定值，稳定值与初始状态无关

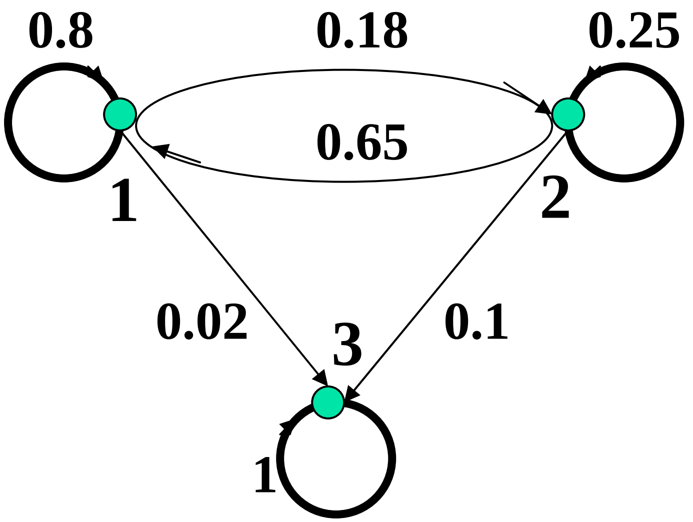
健康与疾病

例2. 健康和疾病状态同上，X_n=1~ 健康，X_n=2~ 疾病 死亡为第3种状态，记X_n=3

$p_{11}=0.8,\ p_{12}=0.18,\ p_{13}=0.02$

$p_{21}=0.65,\ p_{22}=0.25,\ p_{23}=0.1$

$p_{31}=0,\ p_{32}=0,\ p_{33}=1$



$$a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} + a_3(n)p_{31}$$

$$a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} + a_3(n)p_{32}$$

$$a_3(n+1) = a_1(n)p_{13} + a_2(n)p_{23} + a_3(n)p_{33}$$

状态与状态转移

设投保时处于健康状态，预测 $a(n), n=1,2\ldots$

n	0	1	2	3	…	50	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293	…	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326	…	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381	…	1

- 不论初始状态如何，最终都要转到状态3 ；
- 一旦$a_1(k)= a_2(k)=0$, $a_3(k)=1$, 则对于$n>k$, $a_1(n)=0$, $a_2(n)=0$, $a_3(n)=1$, 即从状态3不会转移到其它状态。

马氏链的基本方程

状态 $X_n = 1,2,\cdots k \quad (n = 0,1,\cdots)$

状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i)$,
$i = 1,2,\cdots,k,\ n = 0,1,\cdots$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$$

转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$

$$p_{ij} \ge 0, \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, i = 1,2,\cdots,k$$

基本方程 $a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji},\quad i = 1,2,\cdots,k$

$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$

~ 状态概率向量

$P = \{p_{ij}\}_{k\times k}$ ~ 转移概率矩阵

(非负，行和为1)

$$a(n+1) = a(n)P$$

$$a(n) = a(0)P^n$$

马氏链的两个重要类型

$$a(n+1) = a(n)P$$

1. 正则链 ~ 从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态（如例1）。

$$\text{正则链} \Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$$

$$\text{正则链} \Rightarrow \exists w, a(n) \to w (n \to \infty)$$ **w ~ 稳态概率**

w满足 $wP = w$

例1. $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8w_1 + 0.7w_2 = w_1 \\ 0.2w_1 + 0.3w_2 = w_2 \end{cases} \Rightarrow 0.2w_1 = 0.7w_2$$

w满足 $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

$$w_1 + w_2 = 1 \Rightarrow w = (7/9, 2/9)$$

马氏链的两个重要类型

2. 吸收链 ~ 存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态i, $p_{ii}=1$）,且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态（如例2）。

有r个吸收状态的吸收链的转移概率阵标准形式

$$P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

R有非零元素

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^s$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots y_{k-r})=Me$$

$$e=(1,1,\cdots,1)^T$$

y_i ~ 从第 i 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收前的平均转移次数。

2 钢琴销售的存贮策略

背景与问题

钢琴销售量很小，商店的库存量不大以免积压资金

一家商店根据经验估计，平均每周的钢琴需求为1架

存贮策略：每周末检查库存量，仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售；否则，不订购。

估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大，以及每周的平均销售量是多少。

问题分析

顾客的到来相互独立，需求量近似服从波松分布，其参数由需求均值为每周1架确定，由此计算需求概率

存贮策略是周末库存量为零时订购3架 →周末的库存量可能是0, 1, 2, 3，周初的库存量可能是1, 2, 3。

用马氏链描述不同需求导致的周初库存状态的变化。

动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同。

可按稳态情况（时间充分长以后）计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量。

模型假设

钢琴每周需求量服从波松分布，均值为每周1架

存贮策略：当周末库存量为零时，订购3架，周初到货；否则，不订购。

以每周初的库存量作为状态变量，状态转移具有无后效性。

在稳态情况下计算该存贮策略失去销售机会的概率，和每周的平均销售量。

模型建立

D_n~第n周需求量，均值为1的波松分布

$$P(D_n = k) = e^{-1}/k! \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

S_n~第n周初库存量(状态变量) $S_n \in \{1,2,3\}$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

状态转移规律

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \ge S_n \end{cases}$$

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 1) = P(D_n \ge 1) = 0.632$$

…… ……

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n \ge 3) = 0.448$$

模型建立

状态概率 $a_i(n) = P(S_n = i),\ i = 1,2,3$

马氏链的基本方程 $a(n+1) = a(n)P$

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

已知初始状态，可预测第 n 周初库存量 $S_n=i$ 的概率

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$ $P^2 > 0$ ⇨ 正则链

⇨ 稳态概率分布 w 满足 $wP=w$

$$w = (w_1, w_2, w_3) = (0.285, 0.263, 0.452)$$

$n\to\infty$, 状态概率 $a(n) = (0.285, 0.263, 0.452)$

模型求解

1. 估计在这种策略下失去销售机会的可能性

第n周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i \mid S_n = i) P(S_n = i)$$

n充分大时

$$P(S_n = i) = w_i$$

$$= P(D > 1)w_1 + P(D > 2)w_2 + P(D > 3)w_3$$

D	**0**	**1**	**2**	**3**	**>3**
P	**0.368**	**0.368**	**0.184**	**0.061**	**0.019**

$$w = (0.285, 0.263, 0.452)$$

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

从长期看，失去销售机会的可能性大约 **10%**。

模型求解

2. 估计这种策略下每周的平均销售量

第n周平均销售量

$$R_n=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j,S_n=i)+iP(D_n>i,S_n=i)\ ]$$

需求不超过存量,销售需求　　　需求超过存量,销售存量

$$=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j\,|\,S_n=i)+iP(D_n>i\,|\,S_n=i)]P(S_n=i)$$

n充分大时 $P(S_n=i)=w_i$

$$=0.632\times0.285+0.896\times0.263+0.977\times0.452=0.857$$

从长期看，每周的平均销售量为 0.857(架)

思考：为什么这个数值略小于每周平均需求量1(架)？

敏感性分析

当平均需求在每周1 (架) 附近波动时，最终结果有多大变化。

设D_n服从均值为λ的波松分布

$$P(D_n = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,\ (k = 0,1,2\cdots)$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1-(\lambda+\lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

第n周(n充分大)失去销售机会的概率 $P = P(D_n > S_n)$

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

当平均需求增长（或减少）10%时，失去销售机会的概率将增长（或减少）约12% 。

3 基因遗传

背景

- 生物的外部表征由内部相应的基因决定。
- 基因分优势基因*d* 和劣势基因*r* 两种。

完全优势基因遗传

- 每种外部表征由两个基因决定，每个基因可以是*d*, *r* 中的任一个。形成3种基因类型：*dd* ~ 优种*D*, *dr* ~ 混种*H*, *rr* ~ 劣种*R*。
- 基因类型为优种和混种, 外部表征呈优势；基因类型为劣种，外部表征呈劣势。
- 生物繁殖时后代随机地（等概率地）继承父、母的各一个基因，形成它的两个基因。父母的基因类型决定后代基因类型的概率

完全优势基因遗传

3种基因类型：*dd*~优种*D*, *dr*~混种*H*, *rr*~劣种*R*

- 父母基因类型决定后代各种基因类型的概率

父母基因类型组合		*DD*	*RR*	*DH*	*DR*	*HH*	*HR*
后代各种基因类型的概率	*D*	1	0	1 / 2	0	1 / 4	0
	H	0	0	1 / 2	1	1 / 2	1 / 2
	R	0	1	0	0	1 / 4	1 / 2

$$P(D \mid DH)=P(dd \mid dd,dr)=P(d \mid dd)P(d \mid dr) \;=1\times1/2=1/2$$

$$P(R \mid HH)=P(rr \mid dr,dr)=P(r \mid dr)P(r \mid dr) \;=1/2\times1/2=1/4$$

随机繁殖

讨论基因类型的演变情况

假设

- 设群体中雄性、雌性的比例相等，基因类型的分布相同（记作D:H:R）
- 每一雄性个体以D:H:R的概率与一雌性个体交配，其后代随机地继承它们的各一个基因
- 设初始一代基因类型比例D:H:R $=a:2b:c$ （$a+2b+c=1$), 记$p=a+b$, $q=b+c$, 则群体中优势基因和劣势基因比例 $d:r=p:q$ $(p+q=1)$。

建模

状态X_n=1,2,3 ~ 第n代的一个体属于D, H, R

状态概率 $a_i(n)$ ~ 第n代的一个体属于状态i(=1,2,3)的概率。

随机繁殖

状态转移概率

基因比例 **d:r=p:q**

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j(\text{后代基因类型})|X_n = i(\text{父基因类型}))$$

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1(\text{后代为}\, dd)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = p$$

$$p_{12} = P(X_{n+1} = 2(\text{后代为}\, dr)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = q$$

$$p_{13} = P(X_{n+1} = 3(\text{后代为}\, rr)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = 0$$

$$p_{21} = P(X_{n+1} = 1(\text{后代为}dd)|X_n = 2(\text{父为}dr)) = 1/2 \cdot p = p/2$$

$$p_{22} = P(X_{n+1} = 2(\text{后代为}dr) \\ |X_n = 2(\text{父为}dr)) \\ = 1/2 \cdot p + 1/2 \cdot q = 1/2$$

转移概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

随机繁殖　马氏链模型 $a(n+1)=a(n)P,\ n=0,1,\cdots$

$$a(0)=(a,2b,c)$$

$$P=\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

$$a(1)=a(0)P=(p^2,2pq,q^2)$$

$$p=a+b,\ q=b+c$$

$$a(2)=a(1)P=(p^2,2pq,q^2)$$

$$a+2b+c=1$$

$\cdots\cdots$

$a(0)$任意，稳态分布$w=wP=(p^2,2pq,q^2)$

自然界中通常$p=q=1/2$　　稳态分布D:H:R=1/4:1/2:1/4

解释“ 豆科植物的茎，绿色:黄色=3:1 ”

(*D*+*H*):*R*=3:1

基因类型为*D*和*H*, 优势表征——绿色，

基因类型为*R*，劣势表征——黄色。

近亲繁殖

在一对父母的大量后代中，雄雌随机配对繁殖，讨论一系列后代的基因类型的演变过程。

马氏链模型 —— **状态定义为配对的基因类型组合**

X_n=1,2,3,4,5,6~配对基因组合为*DD,RR,DH,DR,HH,HR*

状态转移概率

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 'DD' \,|\, X_n = 'DD') = 1$$

$$p_{31} = P(X_{n+1} = 'DD' \,|\, X_n = 'DH') = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

近亲繁殖

$$P=\left[\begin{array}{cc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline
1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4\\
0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2
\end{array}\right]$$

状态1(DD), 2(RR)是吸收态，马氏链是吸收链——不论初始如何，经若干代近亲繁殖，将全变为优种或劣种.

计算从任一非吸收态出发，平均经过几代被吸收态吸收。

$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}
8/3 & 1/6 & 4/3 & 2/3\\
4/3 & 4/3 & 8/3 & 4/3\\
4/3 & 1/3 & 8/3 & 4/3\\
2/3 & 1/6 & 4/3 & 8/3
\end{bmatrix}$$

$$y=Me=\left(4\frac{5}{6},6\frac{2}{3},5\frac{2}{3},4\frac{5}{6}\right)^T$$

纯种(优种和劣种)的某些品质不如混种，近亲繁殖下大约5~6代就需重新选种.

4 等级结构

社会系统中的等级结构，适当、稳定结构的意义

描述等级结构的演变过程，预测未来的结构；

确定为达到某个理想结构应采取的策略。

引起等级结构变化的因素：

• 系统内部等级间的转移：提升和降级；

• 系统内外的交流：调入和退出(退休、调离等).

用马氏链模型描述确定性转移问题 ——转移比例视为概率

基本模型

等级 i=1,2,…k（如助教、讲师、教授）

数量分布 $n(t)=(n_1(t), n_2(t), \ldots n_k(t))$

$$N(t)=\sum_{i=1}^{k} n_i(t)$$

$n_i(t)$ ~ t 年属于等级i 的人数， t =0,1,…

t年总人数

比例分布 $a(t)=(a_1(t), a_2(t), \ldots a_k(t))$

$$a_i(t)=\frac{n_i(t)}{N(t)}$$

$a(t)$~等级结构

$$a_i(t)\ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i(t)=1$$

转移矩阵 $Q=\{p_{ij}\}_{k\times k}$， p_{ij} 是每年从i 转至j 的比例

基本模型

退出比例 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_k),\ w_i \sim$ 每年从i退出的比例

$$W(t)=\sum_{i=1}^{k} w_i n_i(t)=n(t)w^T \ \sim t\text{年退出总人数}$$

调入比例 $r=(r_1,r_2,\cdots r_k),\ r_i \sim$ 每年调入 i的比例

$R(t) \sim t$年调入总人数， $r_i R(t) \sim t$年调入 i的人数

$$p_{ij}, w_i, r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1, \ \ i=1,\cdots k$$

基本模型

总人数 $N(t+1)=N(t)+R(t)-W(t)$

等级j人数 $n_j(t+1)=\sum_{i=1}^{k}p_{ij}n_i(t)+r_jR(t)$

$-\cancel{w_j n_j(t)}$

分布 $n(t)$

总人数 $N(t)$

转移 $Q=\{p_{ij}\}$

退出 $w, W(t)$

调入 $r, R(t)$

$$n(t+1)=n(t)Q+R(t)r$$

$$\sum_{i=1}^{k}r_i=1$$

$$\sum_{j=1}^{k}p_{ij}+w_i=1$$

总人数增量 $M(t)=N(t+1)-N(t)$

$$R(t)=W(t)+M(t)=n(t)w^T+M(t)$$

$n(t+1)=n(t)(Q+w^T r)+M(t)r$ ~ 基本模型

已知 $Q, w, r, M(t), n(0)$, 可预测 $n(t)$

基本模型

$$n(t+1)=n(t)(Q+w^{T}r)+M(t)r$$

$$P=Q+w^{T}r \qquad n(t+1)=n(t)P+M(t)r$$

$$Q=\{p_{ij}\},\sum_{j=1}^{k}p_{ij}+w_i=1,\sum_{i=1}^{k}r_i=1 \Rightarrow$$

P的行和为1（随机矩阵）

若总人数不变 $M(t)=N(t+1)-N(t)=0$

等级结构 $a(t+1)=a(t)P=a(t)(Q+w^{T}r)$

与马氏链基本方程 $a(n+1)=a(n)P$ 一致

等级结构$a(t)$ ~状态概率　　P~转移概率矩阵

用调入比例进行稳定控制

$$a(t+1)=a(t)P$$

问题：给定Q, 哪些等级结构可以用合适的调入比例保持不变

$$P = Q + w^T r$$

$$Q=\{p_{ij}\},\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1$$

若存在 r 使 $a = a(Q + w^T r)$，

称 $a = (a_1, \cdots a_k)$ 为稳定结构.

r 应满足 $r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$

$$a = a(Q + w^T r) \Rightarrow r = \frac{a - aQ}{aw^T}$$

可验证 $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$

$a \geq aQ \Rightarrow r \geq 0$ ⇨ **a 为稳定结构**

用调入比例进行稳定控制

$a \geq aQ \Rightarrow a$为稳定结构

例 大学教师(助教、讲师、教授)等级 i=1,2,3，已知每年转移比例

$$Q=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

求稳定结构 $a=(a_1,a_2,a_3)$ $(a_1+a_2+a_3=1)$

可行域A

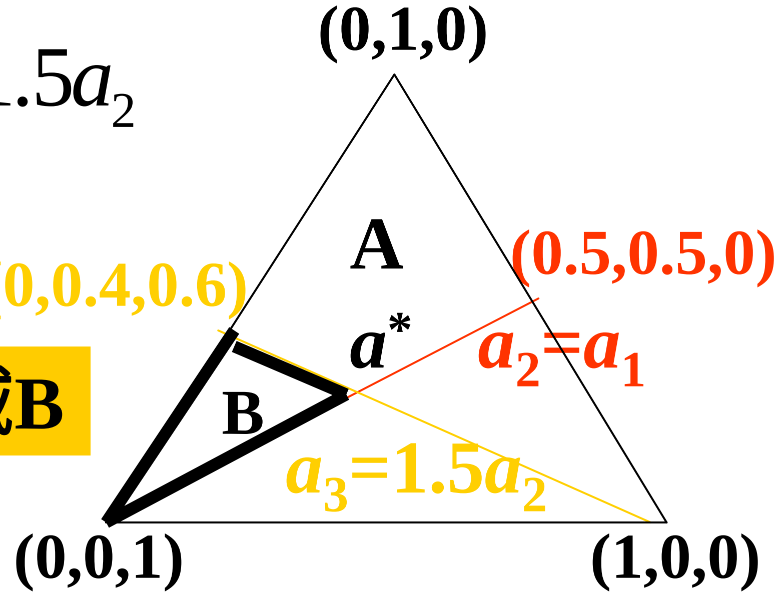
$$a \geq aQ \Rightarrow \begin{cases} a_1 \geq 0.5a_1 \\ a_2 \geq 0.4a_1 + 0.6a_2 \\ a_3 \geq 0.3a_2 + 0.8a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \geq a_1 \\ a_3 \geq 1.5a_2 \end{cases}$$

$a_2 = a_1$与$a_3 = 1.5a_2$交点：

$a_1 : a_2 : a_3 = 1:1:1.5$

$a^* = (0.286, 0.286, 0.428)$

稳定域B



用调入比例进行稳定控制

$a \geq aQ \Rightarrow a$为稳定结构

研究稳定域B的结构 $\Rightarrow$ **寻求$a \geq aQ$ 的另一种形式**

$$a = a(Q + w^T r) \Rightarrow r = \frac{a - aQ}{aw^T} \Rightarrow a = (aw^T)rM$$

$$M = (I - Q)^{-1}$$

记 $r = \sum_{i=1}^{k} r_i e_i$　　记M的第 i行$m_i = (m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{ik})$

$e_i = (0, \cdots 1, \cdots 0)$　　记M的第 i行元素和 $\mu_i = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}$

$$rM = \sum_{i=1}^{k} r_i e_i M = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i$$

$a = (aw^T)rM$ 对行求和 $\Rightarrow aw^T = (\sum_{i=1}^{k} r_i \mu_i)^{-1}$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i \mu_i}$$

用调入比例进行稳定控制

研究稳定域B的结构

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i \mu_i} \longrightarrow a=\sum_{i=1}^{k} b_i s_i$$

$$b_i=\frac{r_i\mu_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j\mu_j} \qquad s_i=\frac{m_i}{\mu_i}$$

$r_i \geq 0 \Leftrightarrow b_i \geq 0$ 当a能表为以b_i为系数的s_i的线性组合，

可验证 $\sum_{i=1}^{k} b_i = 1$ 且$b_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} b_i = 1$时$a$是稳定结构.

稳定域是k维空间中以 s_i为顶点的凸多面体

用调入比例进行稳定控制

例 $Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$

$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 2.5 & 3.75\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

M的第i行$m_i=(m_{i1},m_{i2},m_{i3})$

i行和$\mu_i=\sum_{j=1}^{3} m_{ij},\ \ s_i=m_i/\mu_i$

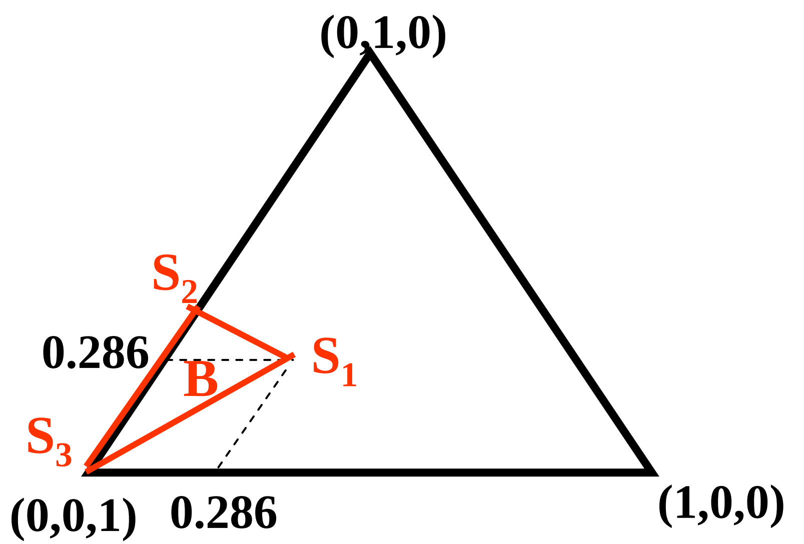
$$\mu_1=7,\mu_2=6.25,\mu_3=5$$

$$s_1=(0.286,0.286,0.428)$$

$$s_2=(0,0.4,0.6),\ s_3=(0,0,1)$$

$$a=b_1 s_1+b_2 s_2+b_3 s_3,$$

$$b_i\ge 0,\ \sum b_i=1$$



稳定域B是以s_i为顶点的三角形

用调入比例进行动态调节

问题：给定Q和初始结构 $\boldsymbol{a}(0)$, 求一系列的调入比例 $\boldsymbol{r}$, 使尽快达到或接近理想结构 $a^* \in B$

逐步法：对于Q和 $\boldsymbol{a}(0)$, 求 $\boldsymbol{r}$使 $\boldsymbol{a}(1)$尽量接近 $\boldsymbol{a}^*$, 再将 $\boldsymbol{a}(1)$作为新的$\boldsymbol{a}(0)$, 继续下去。

定义两个结构 $a^{(1)} = (a_1^{(1)}, \cdots a_k^{(1)}), a^{(2)} = (a_1^{(2)}, \cdots a_k^{(2)})$间的距离

$$D(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_i^{(1)} - a_i^{(2)})^2,\ \lambda_i \sim \text{等级}i\text{的权重}$$

模型

$$\min_{r} \quad D(a(1), a^*)$$

$$s.t.\ a(1) = a(0)(Q + w^T r),$$

$$r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

用调入比例进行动态调节

例

$$Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$$

设 $a(0)=(0,0,1)$,

$a^{*}=(0.286,0.286,0.428)$

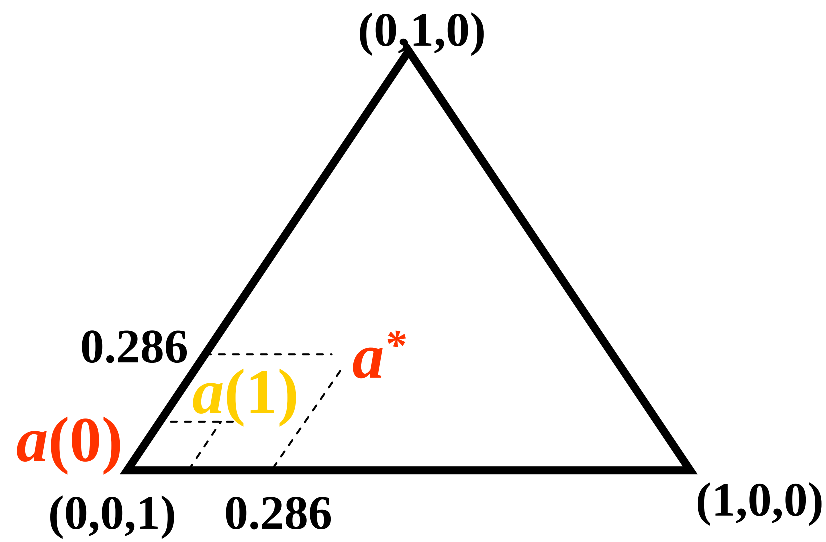
求 r 使 $a(1)$ 尽量接近 a^{*}

$$\min_{r} \quad D(a(1),a^{*})$$

$$s.t.\ a(1)=a(0)(Q+w^{T}r),$$

$$r_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

设权重 $\lambda_i = 1$



$$r=(0.5,0.5,0)$$

$$a(1)=(0.1,0.1,0.8)$$

用调入比例进行动态调节

$r(t), a(t)$ 的计算结果

设 $a(0)=(0,0,1)$,

$a^{*}=(0.286,0.286,0.428)$

t	1	2	3	4	5	6	7
$r(t)$	0.5	0.639	0.747	0.827	0.883	0.922	0.949
	0.5	0.361	0.253	0.173	0.117	0.078	0.051
	0	0	0	0	0	0	0
$a(t)$	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
	0.8	0.670	0.586	0.531	0.495	0.472	0.457

$a(7)$已接近a^{*}

观察$r(t)$的特点

Discussions