层次分析法

层次分析模型

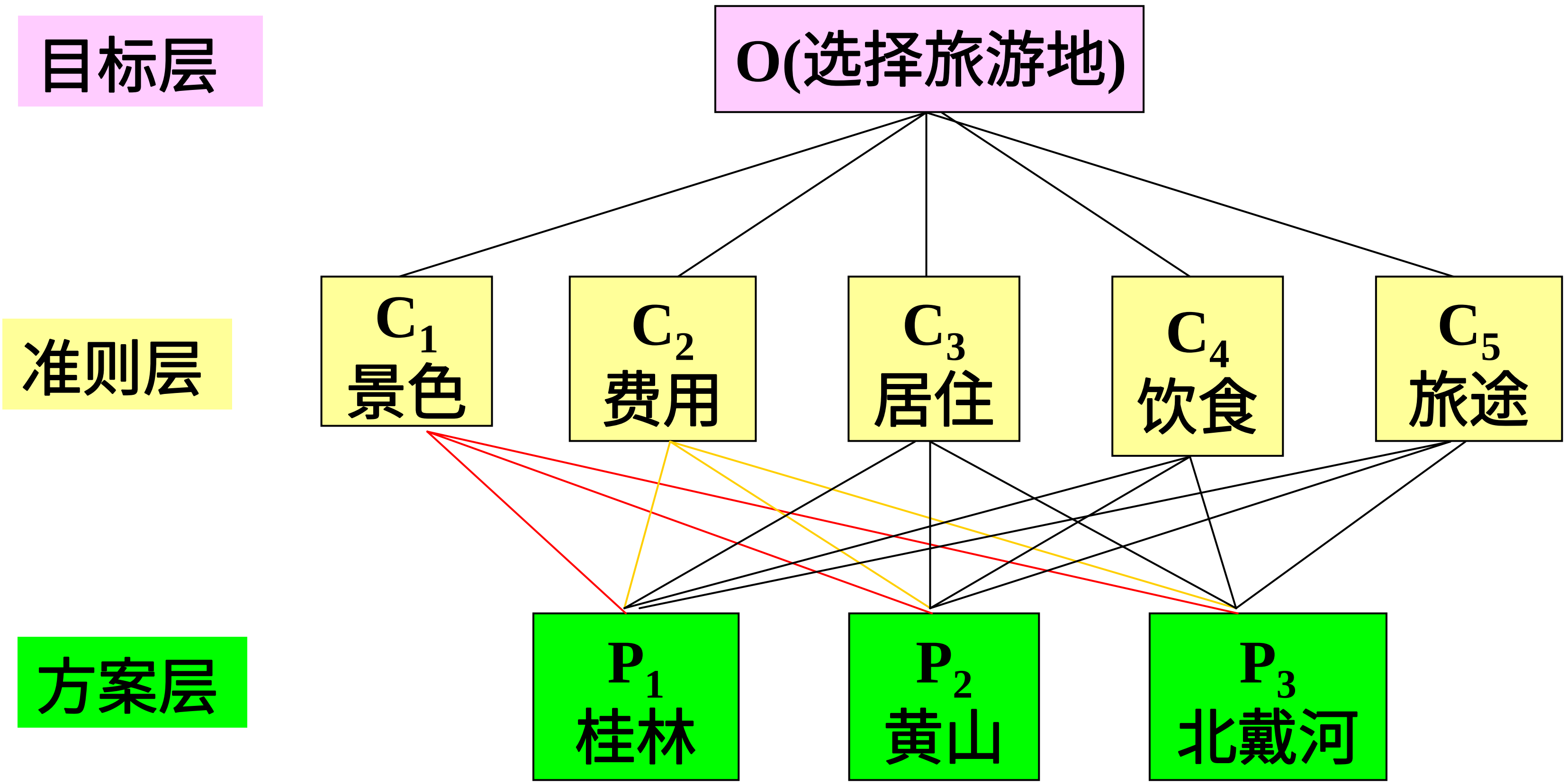
背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化
- Saaty于1970年代提出层次分析法 **AHP (Analytic Hierarchy Process)**
- AHP——一种**定性与定量相结合的、系统化、层次化**的分析方法

一．层次分析法的基本步骤

例．选择旅游地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择．



“选择旅游地”思维过程的归纳

- 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素， 各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

层次分析法的基本步骤

成对比较阵和权向量

元素之间两两对比，对比采用相对尺度

设要比较各准则$C_1, C_2, \ldots, C_n$对目标O的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A = (a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A~成对比较阵

*A*是正互反阵

要由*A*确定$C_1, \ldots, C_n$对O的权向量

成对比较阵和权向量

成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$a_{12}=1/2(C_1:C_2)$

$a_{13}=4(C_1:C_3)$

一致比较 ⇒ $a_{23}=8(C_2:C_3)$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$W(=1)\Rightarrow w_1,w_2,\cdots w_n$

令$a_{ij}=w_i/w_j$

$w=(w_1,w_2,\cdots w_n)^T\sim$ 权向量

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

成对比较完全一致的情况

满足 $a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n$

的正互反阵A称一致阵，如

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致阵性质

- ***A*的秩为1，*A*的唯一非零特征根为*n***
- ***A*的任一列向量是对应于*n* 的特征向量**
- ***A*的归一化特征向量可作为权向量**

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵*A*，建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量*w* ，即

$$Aw=\lambda w$$

成对比较阵和权向量

Saaty等人提出1~9尺度——a_{ij} 取值 1,2,… , 9及其互反数1,1/2, … , 1/9

比较尺度a_{ij}

• 便于定性到定量的转化：

尺度 a_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_i : C_j$的重要性	相同		稍强		强		明显强		绝对强

a_{ij} = 1,1/2, ,…1/9 $\sim C_i : C_j$ 的重要性与上面相反

• 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个

• 用1~3,1~5,…1~17,…,1^p~9^p (p=2,3,4,5), d+0.1~d+0.9 (d=1,2,3,4)等27种比较尺度对若干实例构造成对比较阵，算出权向量，与实际对比发现， 1~9尺度较优。

一致性检验 对A确定不一致的允许范围

已知：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

可证：n 阶正互反阵最大特征根$\lambda \geq n$, 且$\lambda = n$时为一致阵

定义一致性指标: $CI = \frac{\lambda - n}{n-1}$

CI 越大，不一致越严重

为衡量CI 的大小，引入随机一致性指标 RI——随机模拟得到a_{ij}，形成A，计算CI 即得RI。

Saaty的结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当CR<0.1时，通过一致性检验

“选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根λ=5.073

权向量(特征向量)w =(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T

一致性指标 $CI=\dfrac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指标 RI=1.12 (查表)

一致性比率CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

组合权向量 记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

方案层对C_2(费用)的成对比较阵

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/8\\ 3 & 1 & 1/3\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

…C_n

…B_n

最大特征根	λ_1	λ_2	… λ_n
权向量	$w_1^{(3)}$	$w_2^{(3)}$	… $w_n^{(3)}$

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

$w^{(2)}$

0.263
0.475
0.055
0.090
0.110

RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为0.595×0.263+ …=0.300

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

组合权向量

第1层O

第2层$C_1,\ldots C_n$

第3层$P_1, \ldots P_m$

第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,\ k=1,2,\cdots,n$$

构造矩阵 $W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$

第s层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)}$$

其中$W^{(p)}$是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

层次分析法的基本步骤

1）建立层次分析结构模型

深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

2）构造成对比较阵

用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3）计算权向量并作一致性检验

对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4）计算组合权向量（作组合一致性检验*）

组合权向量可作为决策的定量依据。

二．层次分析法的广泛应用

- 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。
- 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。
- 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。
- 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。

例1　国家实力分析

国家综合实力

国民收入　军事力量　科技水平　社会稳定　对外贸易

美、俄、中、日、德等大国

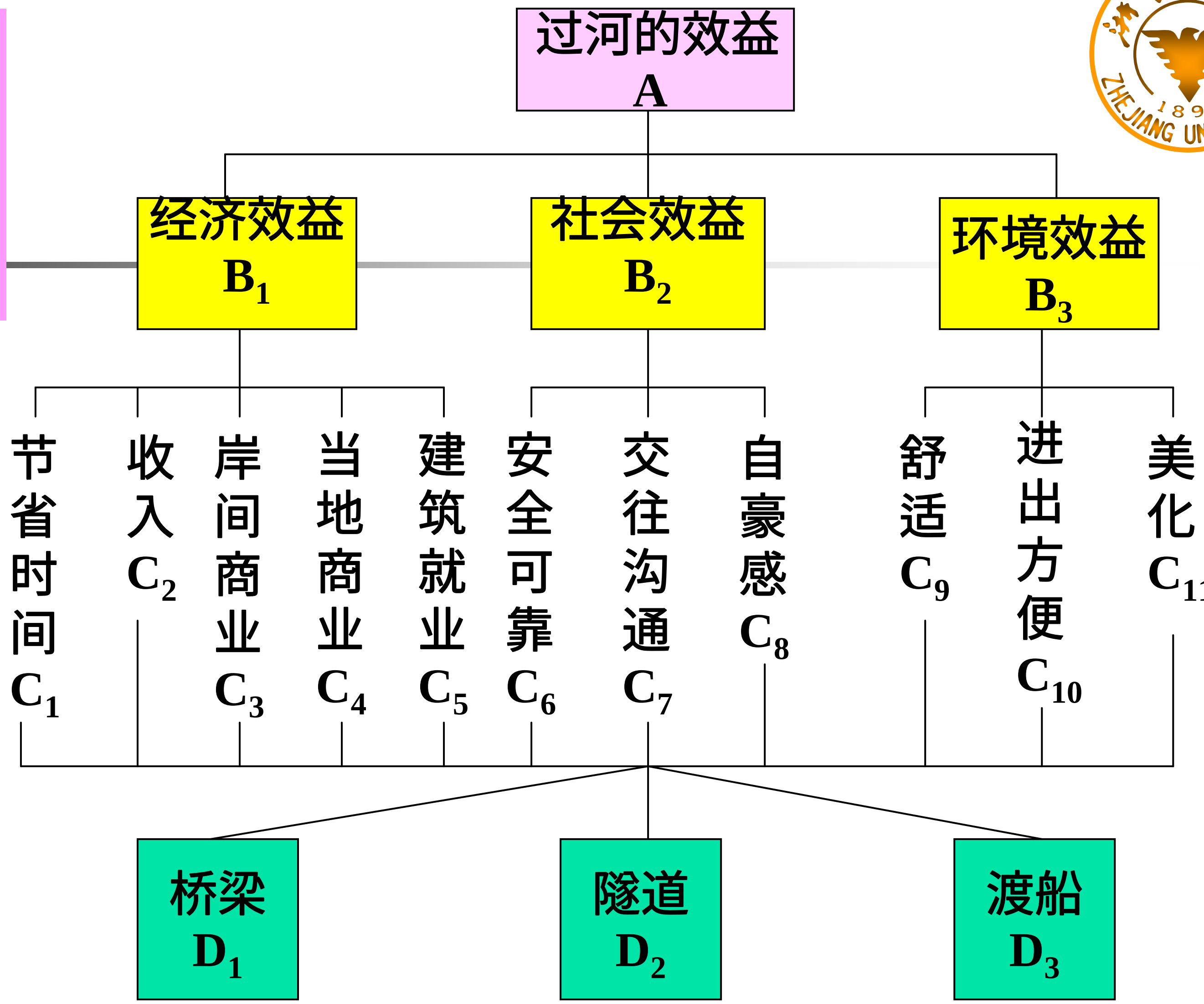
例2　工作选择

工作选择

贡献　收入　发展　声誉　关系　位置

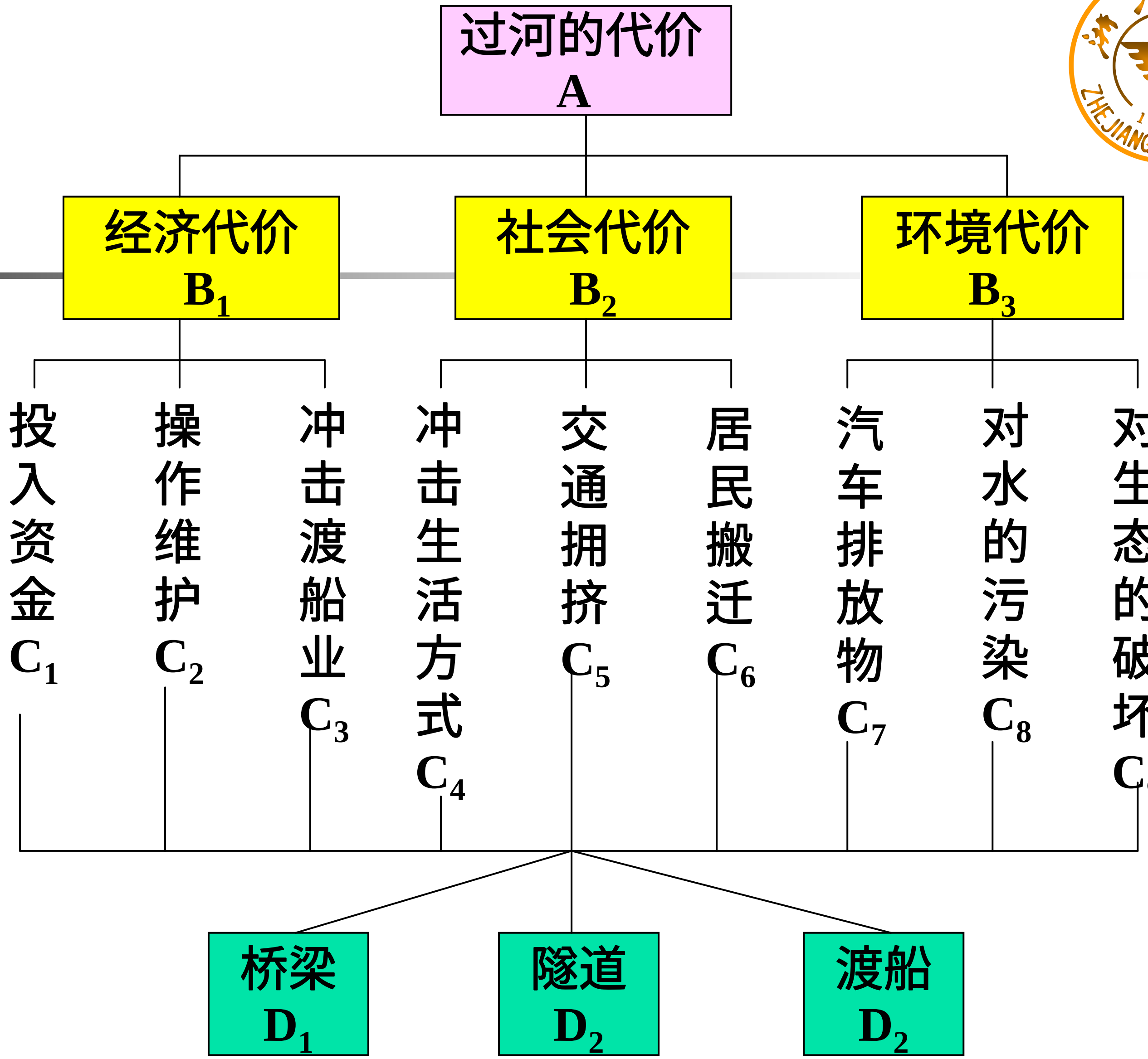
供选择的岗位

例3 横渡江河、海峡方案的抉择



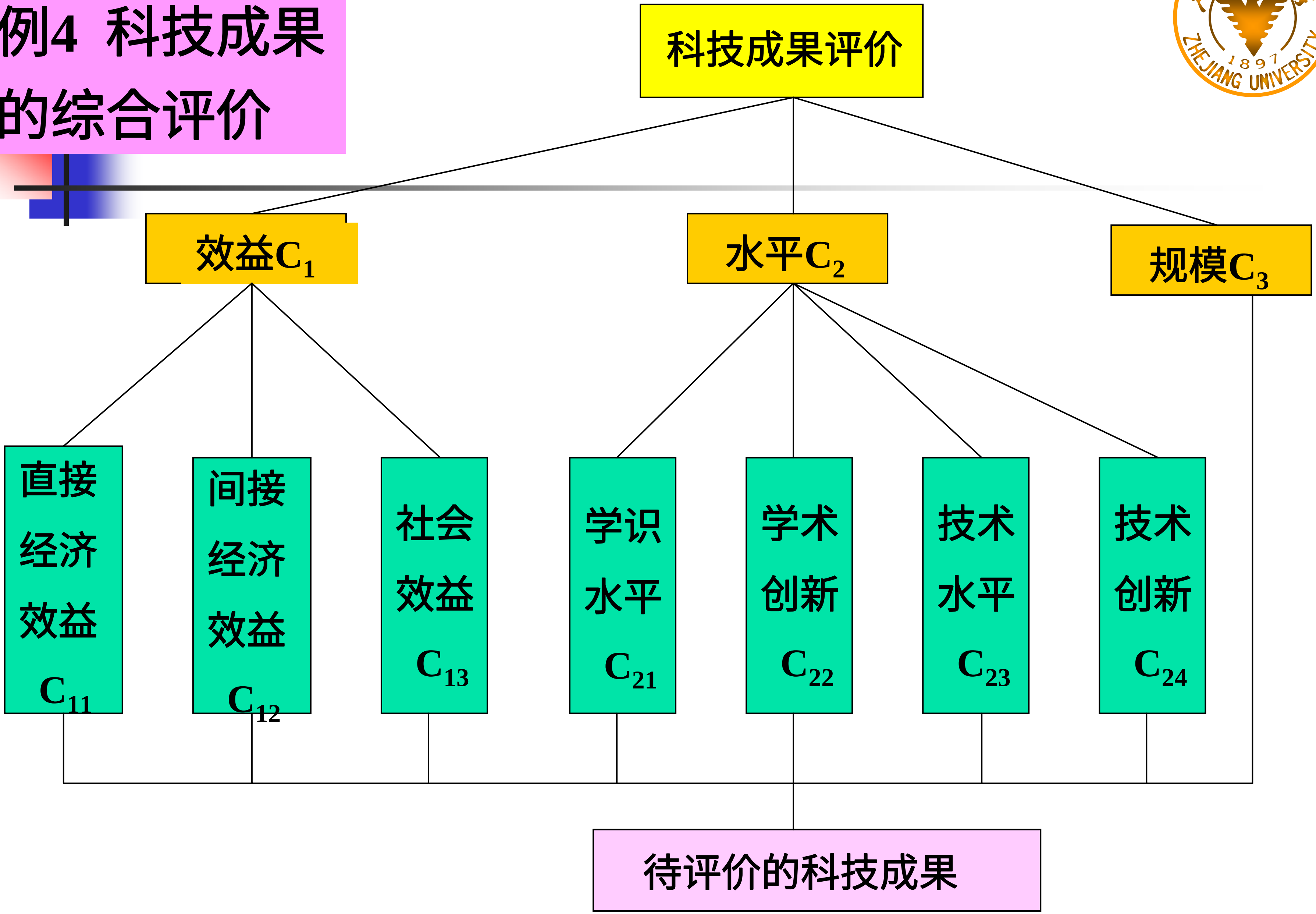
（1）过河效益层次结构

例3 横渡江河、海峡方案的抉择



（2）过河代价层次结构

例4 科技成果的综合评价



三. 层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数？特征向量是否为正向量？一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度？
- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量？
- 为什么用特征向量作为权向量？
- 当层次结构不完全或成对比较阵有空缺时怎样用层次分析法？

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1 正矩阵A 的最大特征根λ是正单根，对应正特征向量w，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^T A^k e}=w,\quad e=(1,1,\cdots,1)^T$

正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。

定理2 n阶正互反阵A的最大特征根λ ¤ n，$\lambda= n$是A为一致阵的充要条件。

一致性指标 $CI=\dfrac{\lambda-n}{n-1}$ 定义合理

2. 正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{算术平均}} \begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$

$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.286\end{bmatrix}$ $\quad Aw=\lambda w \Longrightarrow$ $\lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$

精确结果: $w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$

简化计算

根法——取列向量的几何平均

幂法——迭代算法

1）任取初始向量$w^{(0)}$, k:=0，设置精度ε

2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}$

3）归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

4）若 $\max_i \left| w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)} \right| < \varepsilon$，停止；

否则，k:=k+1, 转2

5) 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$

3. 特征向量作为权向量——成对比较的多步累积效应

问题

一致阵A, 权向量$w=(w_1,\ldots w_n)^T$, $a_{ij}=w_i/w_j$

A不一致, 应选权向量w使w_i/w_j与 a_{ij}相差尽量小（对所有i,j)。

用拟合方法确定w

$$\min_{w_i (i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

非线性最小二乘

线性化——对数最小二乘

$$\min_{w_i (i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

结果与根法相同

多步累积效应

• 按不同准则确定的权向量不同，特征向量有什么优点。

成对比较

C_i:C_j (直接比较)

a_{ij} ~ 1步强度

$$A^2=(a_{ij}^{(2)}) \quad a_{ij}^{(2)}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{sj}$$

$a_{ij}^{(2)}$ ~ 2步强度

$a_{is}a_{sj}$~ C_i通过C_s 与C_j的比较

更能反映C_i对C_j 的强度

$A^k=(a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} \sim k$步强度

体现多步累积效应

$\forall i, j, \exists k_0, k>k_0, a_{is}^{(k)} \geq a_{js}^{(k)}$或$a_{is}^{(k)} \leq a_{js}^{(k)} (s=1,\cdots n)$

⇨ 当k足够大, A^k第i行元素反映C_i的权重 ⇨ 求A^k的行和

定理1 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^T A^k e}=w$

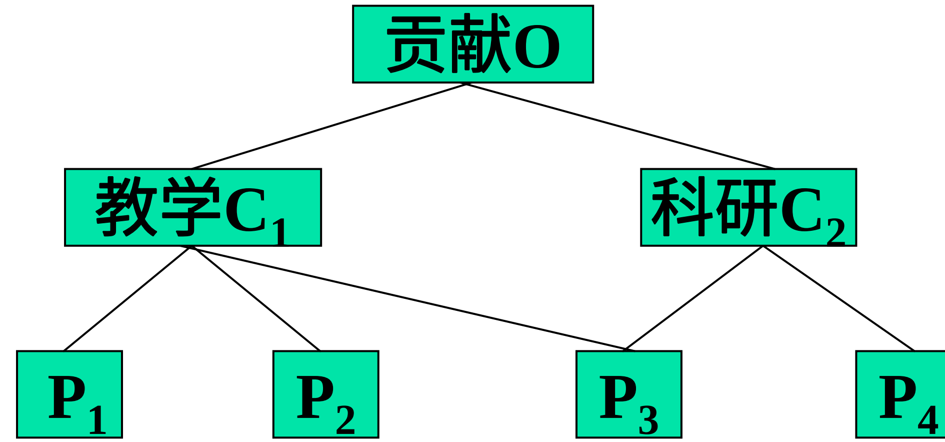
特征向量体现多步累积效应

4.不完全层次结构中组合权向量的计算

完全层次结构：上层每一元素与下层所有元素相关联

不完全层次结构

例: 评价教师贡献的层次结构



设第2层对第1层权向量 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},w_2^{(2)})^T$已定

第3层对第2层权向量 $w_1^{(3)}=(w_{11}^{(3)},w_{12}^{(3)},w_{13}^{(3)},0)^T$

$w_2^{(3)}=(0,0,w_{23}^{(3)},w_{24}^{(3)})^T$已得

讨论由$w^{(2)},W^{(3)}=(w_1^{(3)}, w_2^{(3)})$计算第3层对第1层权向量 $w^{(3)}$ 的方法

P_1,P_2只作教学, P_4只作科研, P_3兼作教学、科研。

C_1,C_2支配元素的数目不等

考察一个特例：

若C_1,C_2重要性相同, $w^{(2)}=(1/2,1/2)^T$,

P_1~P_4能力相同, $w_1^{(3)}=(1/3,1/3,1/3,0)^T, w_2^{(3)}=(0,0,1/2,1/2)^T$

公正的评价应为： $P_1:P_2:P_3:P_4=1:1:2:1$

- 不考虑支配元素数目不等的影响

仍用 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/6,1/6,5/12,1/4)^T$

- 支配元素越多权重越大

教学、科研任务由上级安排

用支配元素数目n_1,n_2对$w^{(2)}$加权修正

$$\tilde{w}^{(2)}=(n_1w_1^{(2)},n_2w_2^{(2)})^T/(n_1w_1^{(2)}+n_2w_2^{(2)})$$

$n_1=3,\ n_2=2,$

$\tilde{w}^{(2)}=(3/5,2/5)^T$

再用 $w^{(3)}=W^{(3)}\tilde{w}^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/5,1/5,2/5,1/5)^T$

- 支配元素越多权重越小

教学、科研靠个人积极性

5. 残缺成对比较阵的处理

- 例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

辅助矩阵

θ为残缺元素

$Cw=\lambda w$ $\Rightarrow$ $\lambda=3,\ w=(0.5714,0.2857,0.1429)^T$

$\Updownarrow$

$\bar{A}w=\lambda w$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\neq j, a_{ij}\neq\theta \\ 0, & i\neq j, a_{ij}=\theta \\ m_i+1, & i=j \end{cases}$$

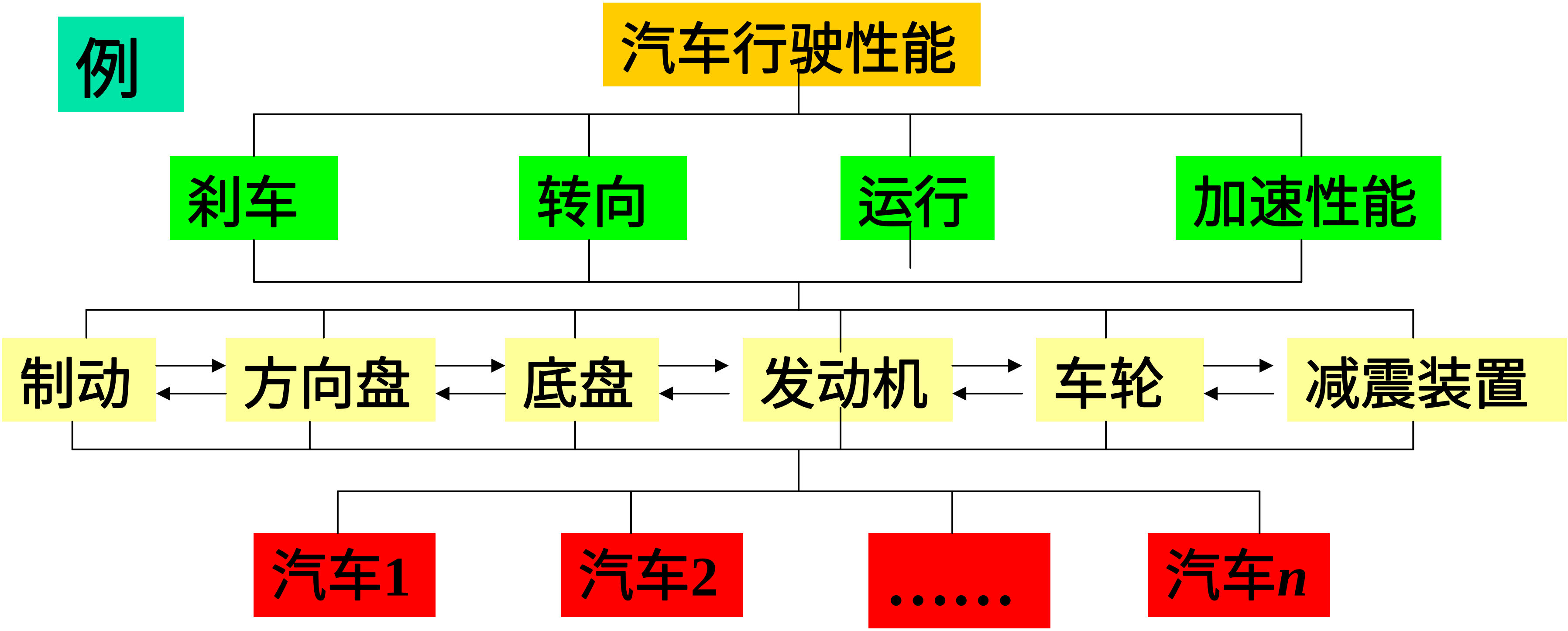
m_i~A第i行中θ的个数

6. 更复杂的层次结构

• 递阶层次结构：层内各元素独立，无相互影响和支配；层间自上而下、逐层传递，无反馈和循环。

• 更复杂的层次结构：层内各元素间存在相互影响或支配；层间存在反馈或循环。

例



层次分析法的优点

- 系统性——将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策——系统分析（与机理分析、测试分析并列）；
- 实用性——定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题；
- 简洁性——计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。

层次分析法的局限

- 囿旧——只能从原方案中选优，不能产生新方案；
- 粗略——定性化为定量，结果粗糙；
- 主观——主观因素作用大，结果可能难以服人。

Discussions